Resolución de ecuación del calor unidimensional con disipación

Juan Marino

1. Introducción

Acá dejo mi resolución de la ecuación diferencial del calor agregando un termino disipativo. Uso Transformadas de Laplace sin ser muy riguroso con las matemáticas.

2. Resolución

2.1. Ecuación diferencial y condiciones iniciales

La ecuación diferencial en este caso queda

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \gamma u(x,t)$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura de cada punto de la barra. Las condiciones iniciales quedan

$$u(x,0) = 0 \qquad u(\infty,t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -c \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

donde $-c$ asegura una pendiente de temperatura constante en $x = 0$.

2.2. Transformada de Laplace

Transformo la ecuación diferencial en el tiempo definiendo

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s).$$

Uso la propiedad (1) y condiciones iniciales y obtengo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = s\mathcal{L}\{u(x,t)\} - u(x,0) = s\mathcal{L}\{u(x,t)\},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}\{u(x,t)\}}{\partial x^2}$$

por último transformo la condición inicial

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\right\} = \frac{\partial \mathcal{L}\{u\}}{\partial x}(0,t) = \mathcal{L}\{-c\} = -\frac{c}{s}$$

Entonces nos queda el sistema

$$sU(x,s) = \kappa \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - \gamma U(x,s)$$

$$\Rightarrow \quad U_{xx} = \frac{s+\gamma}{\kappa} U, \qquad U_x = -\frac{c}{s}$$

Propongo un solución y resuelvo.

$$U(x,s) = C_1(s) e^{\sqrt{\frac{s+\gamma}{\kappa}}x} + C_2(s) e^{-\sqrt{\frac{s+\gamma}{\kappa}}x}$$

Uso condiciones iniciales

$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty u(x,t)e^{st}\,dt = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} u(x,t)e^{st}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow\ C_1(s) = 0 \Rightarrow\ U(x,s) = C_2(s)e^{-\sqrt{\frac{s+\gamma}{\kappa}}x}$$

$$U_x(0,t) = -\frac{c}{s}\ \Rightarrow\ -C_2(s)\sqrt{\frac{s+\gamma}{\kappa}}e^{-\sqrt{\frac{s+\gamma}{\kappa}}x} = -\frac{c}{s}\ \Rightarrow\ C_2(s) = \frac{c}{s}\sqrt{\frac{\kappa}{s+\gamma}}$$

Entonces

$$U(x,s) = c\sqrt{\kappa}\frac{1}{s\sqrt{s+\gamma}}e^{-\sqrt{\frac{s+\gamma}{\kappa}}x}$$

2.3. Inversa

Busco escribir a $U(x,s)$ como el producto de dos transformadas.

$$U(x,s) = \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{s+\gamma}}}{\sqrt{s+\gamma}}\frac{c\sqrt{\kappa}}{s}$$

Primero encuentro la función cuya transformada es el primer término del producto. Uso que

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}\Big\} = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

Usando la propiedad (2)

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{e^{-\frac{1}{4(\alpha t)}}}{\sqrt{\pi(\alpha t)}}\Big\} = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}}}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

y la propiedad (3)

$$\mathcal{L}\Big\{e^{-\gamma t}\frac{e^{-\frac{1}{4(\alpha t)}}}{\sqrt{\pi(\alpha t)}}\Big\} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{s+\gamma}}}{\sqrt{s+\gamma}}\ \Rightarrow\ \mathcal{L}\Big\{e^{-\gamma t}\frac{e^{-\frac{1}{4(\alpha t)}}}{\sqrt{\pi t}}\Big\} = \frac{e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{s+\gamma}}}{\sqrt{s+\gamma}}.$$

Si $\sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{\kappa}}$

$$\mathcal{L}\Big\{e^{-\gamma t}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{\pi t}}\Big\} = \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{s+\gamma}}}{\sqrt{s+\gamma}}.$$

Además tengo que

$$\mathcal{L}\{c\sqrt{\kappa}\} = \frac{c\sqrt{\kappa}}{s}.$$

Finalmente escribo a $U(x,s)$ como producto de transformadas y uso la propiedad (4) teniendo en cuenta que es conmutativa

$$U(x,s) = \mathcal{L}\Big\{e^{-\gamma t}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{\pi t}}\Big\}\mathcal{L}\{c\sqrt{\kappa}\} = \mathcal{L}\Big\{\int_0^t \frac{e^{-\gamma\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa\tau}}\,d\tau\Big\}$$

$$\Rightarrow\ u(x,t) = \int_0^t \frac{e^{-\gamma\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa\tau}}\,d\tau.$$

2.4. Primitiva

Ahora trabajo con la integral obtenida reemplazando $a = \frac{x^2}{4\kappa}$

$$u(x,t) = \frac{c\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-(\gamma\tau + \frac{a}{\tau})}}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \frac{c\sqrt{\kappa}e^{-2\sqrt{a\gamma}}}{2\sqrt{\gamma}} \left[erfc\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{\gamma}\tau}{\sqrt{\tau}}\right) - e^{4\sqrt{a\gamma}} erfc\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{\gamma}\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\Bigg|_0^t .$$

Para evaluar en 0 tomo límite por derecha

$$\lim_{\tau \to 0^+} erfc\left(\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{\gamma}\tau}{\sqrt{\tau}}\right) = \lim_{x \to +\infty} erfc(x) = 0.$$

Entonces, reemplazando a me queda

$$u(x,t) = \frac{c\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{x\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\kappa}}} \left[erfc\left(\frac{\frac{x}{2\sqrt{\kappa}} - \sqrt{\gamma}t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\frac{x\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\kappa}}} erfc\left(\frac{\frac{x}{2\sqrt{\kappa}} + \sqrt{\gamma}t}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

3. Propiedades

Llamando $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ y definiendo la convolución $(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\, dy$ para $x \geq 0$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-) \tag{1}$$

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-\gamma t} f(t)) = F(s + \gamma) \tag{3}$$

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s) \tag{4}$$