Cálculo de la estabilidad de cavidades

DF / FCEyN / UBA
http://www.df.uba.ar

Diego Shalom - Laboratorio 5

8 de marzo de 2018

Resumen

En este tutorial se describe el método de matrices $ABCD$, y se lo utiliza para calcular las condiciones de estabilidad de algunas cavidades resonantes, utilizadas en el curso de Laboratorio 5.

1. Método de las matrices $ABCD$

El análisis de matriz $ABCD$ (también conocido como Ray Transfer Matrix o RTM en inglés) consiste en asociar una matriz de 2 por 2 con cada elemento óptico, y se utiliza esta matriz para describir el efecto de ese elemento sobre un rayo de luz [1, 2, 3, 4]. Dentro de este formalismo, el haz de entrada es descrito por un vector (con r, el desplazamiento transversal y θ el ángulo respecto del eje óptico). Al multiplicar la matriz $ABCD$ por el vector de entrada se obtiene un vector que describe el haz de salida:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La matriz $ABCD$ permite calcular la salida de un elemento óptico, en términos de su entrada. El resultado de una serie de elementos ópticos puede, a su vez, calcularse como el producto matricial de las matrices correspondientes a cada elemento. Las derivaciones detalladas de las matrices de elementos ópticos simples son relativamente sencillas y no se discuten aquí (ver [1, 3] para un listado más extenso). El cuadro 1 incluye la forma general de las matrices para algunos elementos ópticos seleccionados.

Existe software específico que permite visualizar y diseñar elementos y cavidades, calcular su estabilidad. Un ejemplo de estos es el reZonator [4], disponible de manera gratuita.

Elemento	Matriz	Observaciones
Propagación en un medio homogéneo	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	d = distacia
Reflexión en espejo curvo	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	R = radio de curvatura
Espejo plano	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R = \infty$
Lente delgada	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	f = distancia focal

Cuadro 1: Matrices equivalentes de elementos seleccionados (para una lista más completa de elementos y sus matrices correspondientes ver [1, 3]).

2. Condición general de estabilidad

Utilizando este formalismo, podemos describir una cavidad a través de la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ que la representa. Esta matriz se obtiene multiplicando las matrices correspondientes a los elementos que la componen (en el orden correcto). A su vez, múltiples pasadas (n) del haz por la cavidad corresponden a multiplicar el haz de entrada por la matriz $\mathbf{M}^n$. Utilizando este formalismo resulta relativamente sencillo determinar si una dada cavidad con matriz $\mathbf{M}$ es estable [2, 4]. Se puede determinar bajo qué condiciones un haz de luz dentro de la cavidad será reenfocado periódicamente y se mantendrá dentro de la cavidad. Para ello, debemos encontrar los autovectores y autovalores de la matriz correspondiente a la cavidad:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} R_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} R_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$[\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}] \begin{pmatrix} R_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

con $\mathbf{I}$ la matriz identidad de 2x2. La ecuación característica queda:

$$\lambda^2 - 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0, \tag{4}$$

donde $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = A + D$ es la traza de la matriz, y $\det(\mathbf{M}) = AD - BC$ su determinante. Resolviendo, los dos autovalores toman los valores:

$$\lambda_{+,-} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{M}) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{M})^2 - 4\det(\mathbf{M})}}{2}. \tag{5}$$

En muchos casos prácticos (y en todos los que se presentan en este tutorial), el determinante de la matriz es idénticamente igual a 1, por lo que los autovalores quedan escritos únicamente en términos de la traza:

$$\lambda_{+,-} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{M}) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{M})^2 - 4}}{2}. \tag{6}$$

Para que la cavidad sea estable, ningún rayo debe alejarse del eje principal, es decir que λ^n no debe crecer indefinidamente. Esta condición implica que ninguno de los autovalores debe ser mayor que 1 en valor absoluto ($|\lambda_{+,-}| \leq 1$). Se puede mostrar que esta condición sobre los autovalores corresponde a pedir que $|\mathrm{tr}(\mathbf{M})| \leq 2$, o lo que es lo mismo:

$$-2 \leq \mathrm{tr}(\mathbf{M}) \leq 2. \tag{7}$$

Esta condición vale en general para cualquier cavidad. En la sección siguiente analizamos algunos casos de cavidades de interés en el curso.

3. Casos particulares

3.1. Cavidad con dos espejos iguales

Consideremos una cavidad formada por dos espejos iguales, de radio de curvatura R, separados por una distancia L. La matriz correspondiente, su determinante y su traza son:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(\mathbf{M}) &= 1 \\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}) &= 2\left(1 - \frac{L}{R}\right). \end{aligned}$$

La condición de estabilidad (ecuación 7) queda:

$$\begin{array}{rcl} -2 \leq & 2\left(1 - \frac{L}{R}\right) & \leq 2 \\ 0 \leq & \frac{L}{R} & \leq 2, \end{array}$$

por lo que la cavidad será estable sólo para espejos cóncavos ($R > 0$), y si la distancia entre espejos es menor a $2R$. Para el caso límite de dos espejos planos ($R = \infty$), se dice que la cavidad es *marginalmente estable*.

3.2. Cavidad con dos espejos distintos

Consideremos ahora una cavidad formada por dos espejos distintos, de radios de curvatura R_1 y R_2, separados por una distancia L. La matriz correspondiente, su determinante y su traza son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\det(\mathbf{M}) &= 1 \\
\mathrm{tr}(\mathbf{M}) &= 4\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) - 2.
\end{aligned}
$$

La condición de estabilidad (ecuación 7) queda:

$$
\begin{aligned}
-2 \leq \quad & 4\left(1 - \tfrac{L}{R_1}\right)\left(1 - \tfrac{L}{R_2}\right) - 2 & \leq 2 \\
0 \leq \quad & \left(1 - \tfrac{L}{R_1}\right)\left(1 - \tfrac{L}{R_2}\right) & \leq 1 \\
0 \leq \quad & g_1 g_2 & \leq 1,
\end{aligned}
$$

donde $g_i = 1 - \frac{L}{R_i}$. En la figura 1 se muestran las regiones de estabilidad, en el plano g_1-g_2. La diagonal corresponde nuevamente al caso de dos espejos iguales.

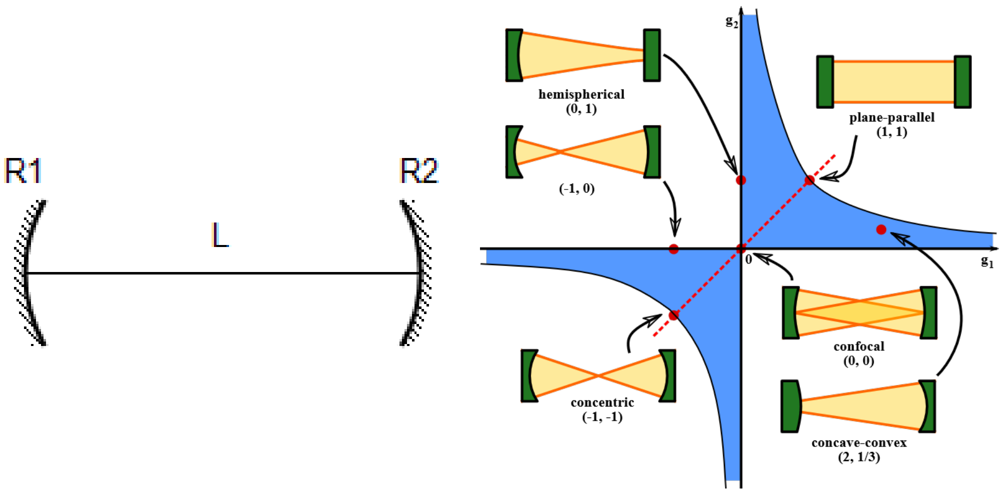

Figura 1: Cavidad con dos espejos distintos: Regiones de estabilidad en el plano g_1-g_2. Crédito: FDominec - Own work, CC BY-SA 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3017470`

3.3. Cavidad en V, dos espejos planos y uno curvo

Consideremos una cavidad en V formada por dos espejos planos, y un espejo de radio de curvatura R, distancias a y b, como se muestra en la figura 2. La matriz correspondiente, su determinante y su traza son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\det(\mathbf{M}) &= 1 \\
\operatorname{tr}(\mathbf{M}) &= 4\left(1 - 2\frac{a}{R}\right)\left(1 - 2\frac{b}{R}\right) - 2
\end{aligned}
$$

La condición de estabilidad (ecuación 7) queda:

$$
\begin{aligned}
-2 \leq \quad & 4\left(1 - 2\tfrac{a}{R}\right)\left(1 - 2\tfrac{b}{R}\right) - 2 & \leq 2 \\
0 \leq \quad & \left(1 - 2\tfrac{a}{R}\right)\left(1 - 2\tfrac{b}{R}\right) & \leq 1.
\end{aligned}
$$

En la figura 2 se muestran las regiones de estabilidad, para un espejo de R =50 cm de radio de curvatura. La cavidad será estable si el espejo es cóncavo ($R > 0$), y si ambas distancias a y b son menores que $R/2$, o si ambas son mayores que $R/2$. Es importante tener en cuenta estas regiones de estabilidad a la hora de diseñar y construir cavidades resonantes.

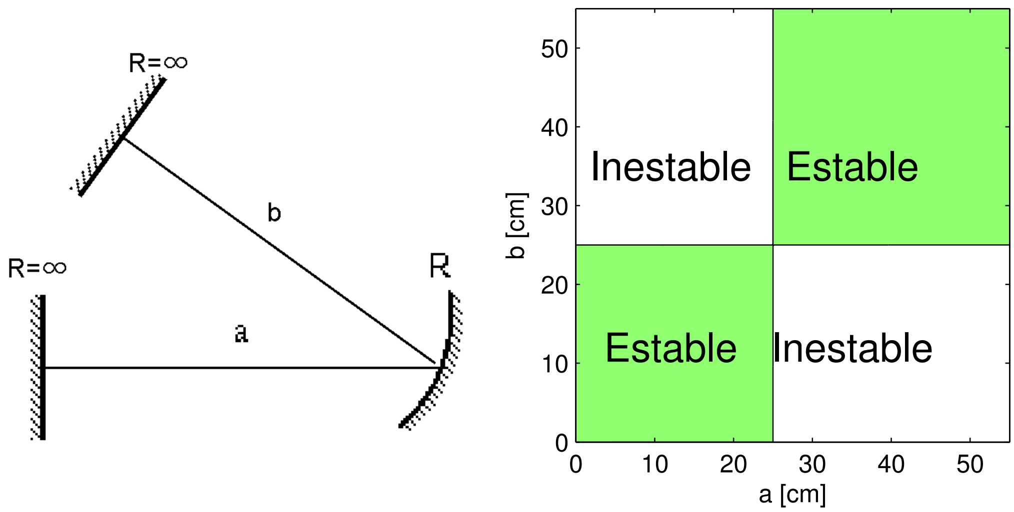

Figura 2: Cavidad en V, formada por dos espejos planos y un espejo curvo: Regiones de estabilidad en el plano a-b para un espejo curvo de $R = 50$ cm de radio de curvatura.

3.4. Cavidad lineal con dos espejos planos y una lente

Consideremos finalmente una cavidad lineal, formada por dos espejos planos, y una lente de distancia focal f, colocada a distancias a y b de los espejos. , como se muestra en la figura 3. La matriz correspondiente, su determinante y su traza son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
\det(\mathbf{M}) &= 1\\
\mathrm{tr}(\mathbf{M}) &= 4\left(1-\frac{a}{f}\right)\left(1-\frac{b}{f}\right)-2
\end{aligned}$$

La condición de estabilidad (ecuación 7) queda:

$$\begin{aligned}
-2 \leq \quad & 4\left(1-\tfrac{a}{f}\right)\left(1-f\tfrac{b}{f}\right)-2 & \leq 2\\
0 \leq \quad & \left(1-\tfrac{a}{f}\right)\left(1-\tfrac{b}{f}\right) & \leq 1
\end{aligned}$$

En la figura 3 se muestran las regiones de estabilidad, para el caso de una lente de f =10 cm de distancia. La cavidad será estable si la lente es convergente ($f > 0$), y si ambas distancias a y b son menores que f, o si ambas son mayores que f.

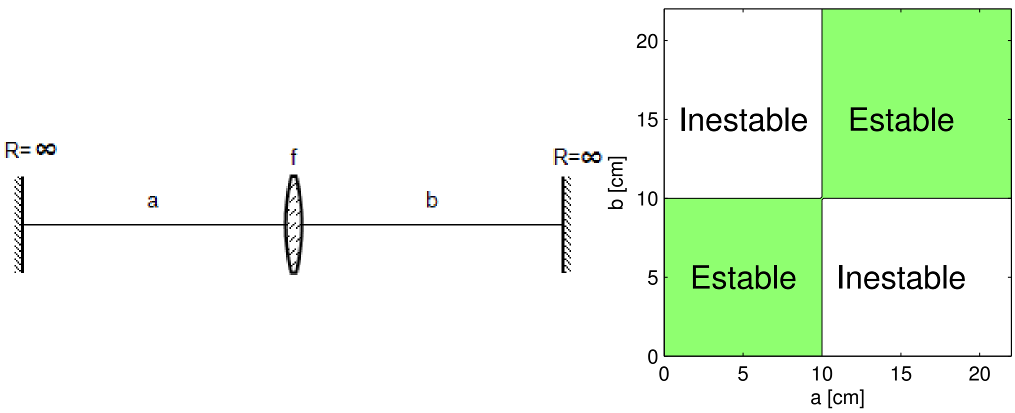

Figura 3: Cavidad con dos espejos planos y una lente: Regiones de estabilidad en el plano a-b para una lente de $f = 10$ cm de distancia focal.

Referencias

[1] Ray transfer matrix analysis en Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Ray_transfer_matrix_analysis

[2] Shahid Rafique, M. Matrix Formulation and Stability Criteria of Laser Cavityhttps://abmpk.files.wordpress.com/2014/03/1-matrix-formulation-and-stability-criteria-of-laser-cavity.pdf.

[3] BYU Course, ABCD Matrices Tutorial http://www.photonics.byu.edu/ABCD_Matrix_tut.phtml.

[4] OPI Courses, Resonator stability http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M01_C03/co/Contenu_05.html.

[4] reZonator 1.7 http://rezonator.orion-project.org/.