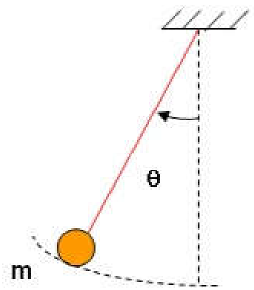
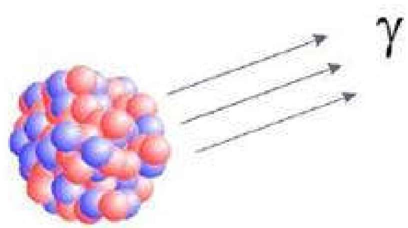
Procesos estocásticos en física experimental

Procesos estocásticos vs determinísticos

Proceso determinístico $x(t)$ ⟺ Proceso estocástico $P(X(t) = x)$





- Angulo $\theta(t)$ de un pendulo.
- $I(t)$ en un circuito.

- Cantidad de "1" al tirar 4 dados.
- Numero de emisiones γ de una fuente en 1 segundo.

Son variables aleatoria

NO son variables aleatorias:

- Vida media de un isotopo radioactivo
- Numero medio de veces que sale el "1" al tirar 4 dados

Preguntas fundamentales interesantes

Proceso determinístico $x(t)$ ⇔ Proceso estocástico $P(X(t) = x)$

Definicion no obvia

En muchos casos podemos asignar una incerteza y tratar el problema como deterministico.

Incapacidad de conocer o asignar condiciones que determinan $x(t)$, lo que genera valores aleatorios en $X(t)$.

Proceso intrinsicamente estocástico. X variable aleatoria. Ej: decaimiento radiactivo, fluctuación térmica

Definicion no obvia

Nos interesa aprender a medir y caracterizar estos procesos

"En el sentido más general todo proceso físico real se puede pensar como estocástico y toda variable como aleatoria. La cuestion es bajo que condiciones la denominacion de *determinista* es una buena aproximación". *An Introduction to Stochastic Processes in Physics,* Don S. Lemos.

Preguntas fundamentales interesantes

- Qué significa la Probabilidad $P(X = x)$?
- Cómo se determina $P(X = x)$?

Proceso inductivo:
Las simetrias y la fisica del problema nos permiten deducir una $P(x)$

Proceso estadístico: estimamos $P(X = x)$ midiendo N veces la variable aleatoria X y estimando la frecuencia $f(X)$con la que cae en el valor x.

Deben coincidir en el limite de $N \rightarrow \infty$.

Son conceptualmente identicas ambas interpretaciones de la probabilidad?

PREGUNTA AUN NO RESUELTA!

Por suerte como físicos sólo nos interesa conocer las leyes que gobiernan las probabilidades y como aplicarlas, y estas son independientes del concepto subyacente.

Mediciones y observaciones

Llamamos **evento aleatorio** a todo posible resultado experimental que surja de una observacion en un proceso estocástico. Cuando es cuantificable, **se asocia a una variable aleatoria** X. Ejemplos: Decaimiento radioactivo en un determinado intervalo de tiempo. Numero de fotones en un determinado intervalo de tiempo. Ej: veces que sale el “1” .

Una **observacion** es la realización concreta de un evento, con valor x. Ej: salio 3 veces.

Una **medición** implica en cambio la estimación del **valor esperado** , mas en general de alguna característica de la distribución. Ejemplo: La vida media de un muon, la intensidad de la luz, la cantidad de pochoclo que explotan en promedio por unidad de tiempo, la desviación estandart de distribución estadística de los fotones, etc.

- En algunos experimentos (deterministas), la observación coincide con la medición dentro del error instrumental.
- Si mejoramos la resolución el mismo experimento puede arrojar distintas observaciones. En los casos mas simples basta con promediar los valores para tener el resultado de la medición.
- En otros tenemos que estimar la medicion a partir de distribución de probabilidad asociada a las observaciones.

Notacion simplificada: $P(X = x) \sim P(x)$

Distribución de probabilidad

Una distibución de probabilidad $P(x)$ asigna probabilidades de tomar valores a la variable aleatoria X.

Se puede definir a partir de $P(x)$ una **Función de distribución (FDA o FD)**

$$F(t) = P\left\{x < t\right\}$$

En el caso de **variables continuas** definimos una **densidad de probabilidad**

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad P\left\{x_1 \leq x \leq x_2\right\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

Momentos de una distribucion

Valor medio o valor esperado:

$$E(x) \equiv \langle x \rangle = \mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

$$E(x) \equiv \langle x \rangle = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

Varianza:

$$\mathrm{var}(x) = \sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right] \qquad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$$

Momento de orden n:

$$\mu_n = E(x^n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n p(x_k)$$

$$\mu_n = E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, \mathrm{d}x$$

En el caso de muchas variables:

$$C_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$$

C_{ii} es la varianza de x_i, mientras que C_{ij} da cuenta de la correlacion entre las variables.

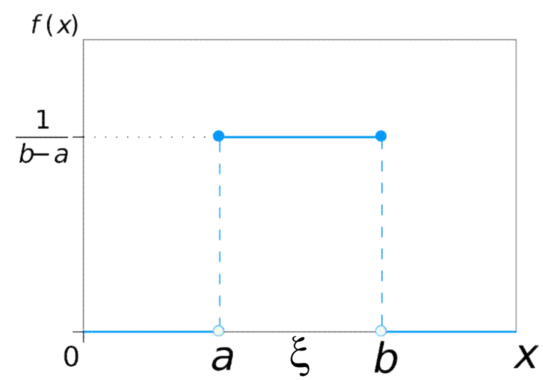
Algunas distribuciones de interés

1) Distribución uniforme en un intervalo o "distribucion al azar".

- Tenemos un instrumental con una resolución α, determinada por un proceso de digitalizacion. Al medir un valor ξ asumimos que la variable de interes tiene identica probabilidad de tomar cualquier valor dentro de un intervalo α alrededor de ξ .

$$f(x|\xi,\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha \text{ if } |x-\xi| < \alpha/2 \\ 0 \quad \text{else .} \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = \xi \qquad\qquad \sigma^2 = \alpha^2/12$$



Esta distibución es la que se usa para generar numeros al azar equiprobable en un determinado intervalo.

Algunas distribuciones de interés

2)Distribución binomial: evento discreto con probabilidad finita (Ej: dado)

- Un experimento tiene, como uno de los posibles resultado, la observacion de la propiedad A(con probabilidad p).
- Repetimos el experimento n veces.
- El resultado obtenido en un experimento no condiciona ni influye en los siguientes.

La probabilidad de observar, en esas n pruebas, k veces la propiedad A es:

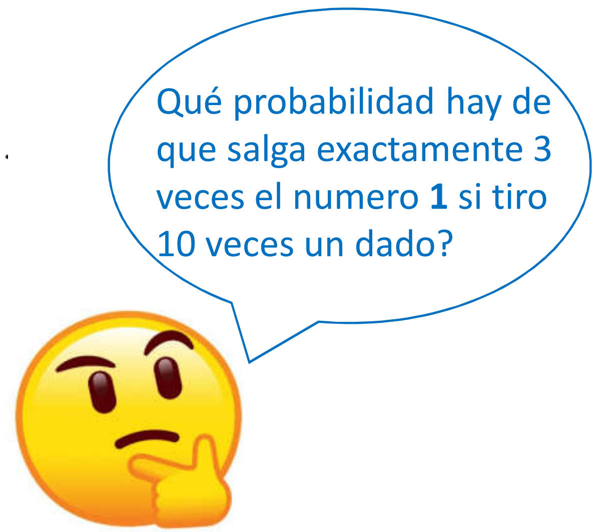
$$B_p^n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad k = 0, \ldots, n \, .$$

El valor esperado es : $E(k) = np$

La varianza es: $\sigma^2 = n\sigma_1^2 = np(1-p)$

Si $p \ll 1$ y $n \gg 1$, $np =$ Entonces: $\sigma^2 = np$

La varianza es igual a la media. Esto es caracteristico de la **distribucion de Poisson**.



Algunas distribuciones de interés

3)Distribución multinomial : N posibles eventos discretos cada uno con su p (histograma)

- Tenemos un experimento que puede dar N resultados (observaciones) posibles.
- La probabilidad de cada uno de esos posibles resultados es $p_1, p_2 ... p_N$
- Repetimos el experimento n veces.
- El resultado obtenido en un experimento no condiciona ni influye en los siguientes.

La probabilidad de obtener, en esas n pruebas, k_1 veces el valor 1, , k_2 veces el valor 2, ... $\sum_{i=1}^{N} k_i = n$
Es:

$$M^{n}_{p_1, p_2, \ldots, p_N}(k_1, k_2, \ldots, k_N) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{N} k_i!} \prod_{i=1}^{N} p_i^{k_i}$$

Qué probabilidad hay de que pasen exactamente 3 autos blancos, uno rojo y uno negro en la proxima hora?

Los valores esperados son : $n_i = np_i$

Si no hay correlacion entre columnas cada una tiene una estadistica Binomial

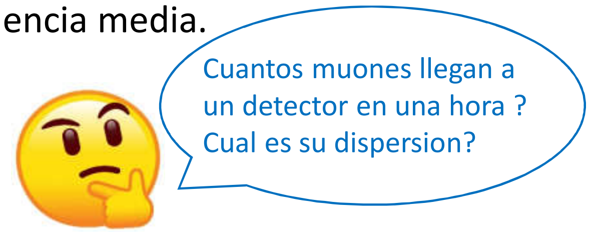
Si la correlacion entre las columnas se desprecia y ademas $p_i \ll 1$ Entonces: $C_{ij} \approx n_i \delta_{ij}$

En ese caso, cada columna sigue una **distribucion de Poisson**.

Algunas distribuciones de interés

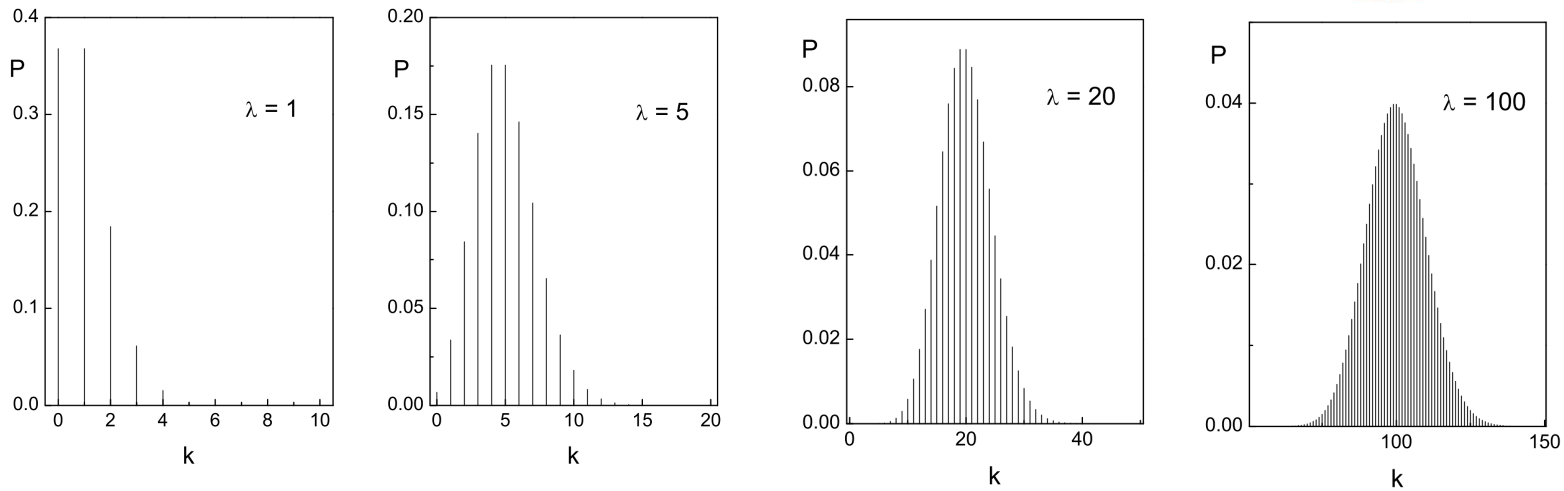
4)Distribución de Poisson : eventos al azar con frecuencia media definida.

- En el limite $n \dashrightarrow \infty$ y $p \dashrightarrow 0$, la distibución binomial tiende a la de Poisson, con $\lambda = np$.
- En un experimento medimos eventos que ocurren aleatoriamente con una frecuencia media.
- Llamamos λ al numero de eventos por unidad de tiempo determinado por esa frecuencia media.



La probabilidad de medir k eventos en esa unidad de tiempo es: $P_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$$E(k) = \lambda\ ,\ \mathrm{var}(k) = \lambda\ .$$



Algunas distribuciones de interés

5) Distribución Normal o Gaussiana (la mas famosa)

$$P(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

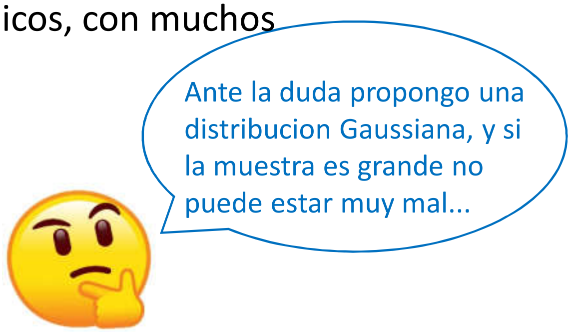
- El valor medio de N variables aleatorias independientes con una misma estadistica de varianza finita σ_0 , en el limite de N muy grande, obedece una estadistica Gaussiana con varianza $\sigma^2 = \sigma_0^2/N$.

- La distribucion de Poisson en el limite de valor medio λ alto tiende a la Gaussiana

- Otras distribuciones (Binomial, χ^2) tambien tienden a la Gaussiana en el limite de numeros/grado de libertad muy grandes.

- Esto hace que muchos procesos naturales estadisticos en sistemas termodinamicos, con muchos grados de libertad obedezcan estadistica Gaussiana.

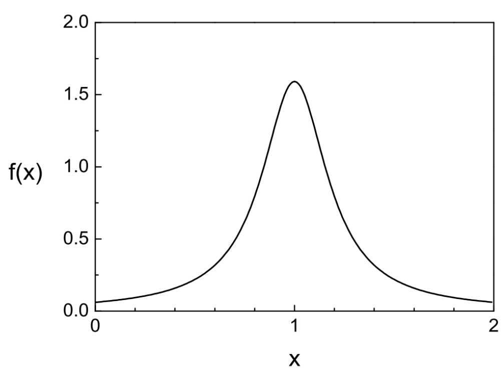
- Ademas tiene propiedades matemáticas muy utiles que permiten estimación analítica de parámetros.



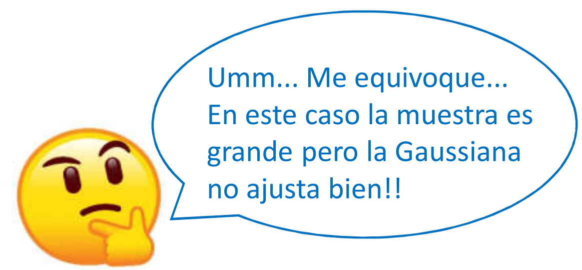
Algunas distribuciones de interés

6) Distribución Lorentziana

- Describe procesos fisicos cuya probabilidad aumenta en forma pronunciada cerca del valor estimado, pero es finita para valores lejanos. Ajusta fenomenos resonantes y ciertos procesos de scatering.
- En esta distribución la varianza no tiene un significado físico definido, y el estimador relevante de la dispersion es el ancho a mitad de altura alrededor del maximo Γ.



$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(x-a)^2 + (\Gamma/2)^2}$$



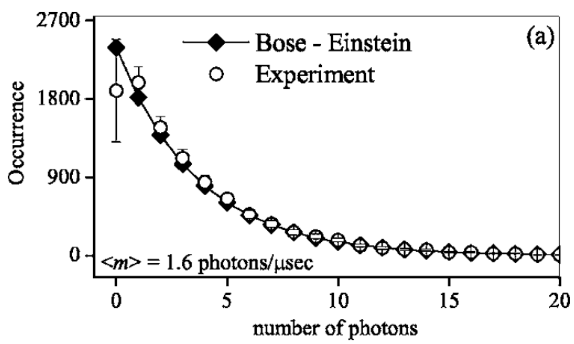
Algunas distribuciones de interés

7) Distribución de Bose Einstein

- Describe la estadistica de bosones (asociados a los modos de vibracion de un oscilador monocromatico) : fotones, fonones, etc.

$$\langle n \rangle = \sum_n nP(n) = \frac{\Sigma_n n(e^{-\hbar\omega/k_B\theta})^n}{\Sigma_n (e^{-\hbar\omega/k_B\theta})^n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B\theta} - 1}$$

Si quiero describir los fotones que llegan al detector no los puedo pensar siempre como no correlacionados...



M. L. Martínez Ricci et al., Am. J. Phys. **75** ,2007

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{1+n}}$$

Esto sera valido siempre que **el intervalo de medicion $\boldsymbol{T}$** sea mucho menor que el tiempo de correlación t_C.
En el limite opuesto ($t_C \ll T$) se recupera la distribucion de Poisson.

Los experimentos:

Proceso estocástico que genera eventos al azar

- Pochoclos que explotan
- Canilla que gotea
- Autos pasando por una esquina
- Fotones opticos emitidos por fuente de luz
- Radiacion gama emitida por fuente radiactiva

eventos

t_c de correlacion caracteristico
f media caracteristica

ruido

Eventos espureos

Detector

- Parlante
- Fotomultiplicador
- Centellador

señal

señal

Podemos adquirir la señal sin conformar

Conformacion de pulsos

Electronica que transforma la señal en pulsos detectables por la interfaz (Amplitud y ancho τ). Puede tambien eliminar señal espurea.

interfaz

- Placa de adquisicion
- Osciloscopio
- Placa de sonido

Umbral, rango, y resolucion temporal

Adquisición durante un tiempo T

Cuentas o señal

Repetimos muchas veces para cada T

Procesado

Limpia eventuales cuentas espureas y organiza resultados para armar histograma

$f_T(n)$

Histograma de numero de eventos para cada T

Ajustes

Mejor ajuste

Distribucion, $\langle n \rangle, \sigma$

El resultado depende de T, τ

En los experimentos: tiempos característicos

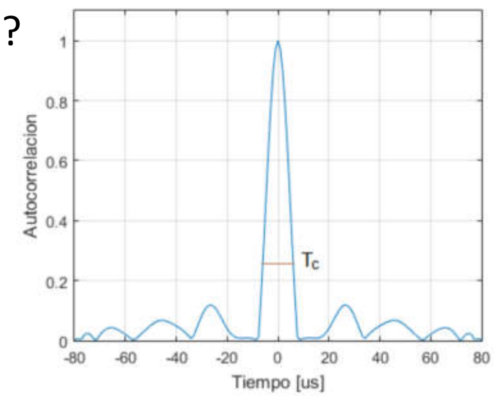
eventos

t_c de correlacion caracteristico
f media caracteristica

- Qué condiciones tiene que cumplir la $\boldsymbol{f}$ **media** para realizar correctamente los experimentos?
  - Debe ser suficientemente alta como para poder medir muchos eventos en el tiempo T disponible.
  - Debe ser suficientemente baja como para poder distinguir los eventos con el tiempo minimo de nuestro sistema de deteccion.

- Ejemplo f baja: con una fuente radiactiva de muy baja actividad se requiere dias para levantar un espectro (hay varias en labo 5!!)
- Ejemplo f alta: con una fuente de luz intensa los picos generados por los fotones se superponen y vemos un continuo (esto puede atenuarse con un polarizador ☺)

- Porqué es relevante **el tiempo de correlación** $\boldsymbol{t_c}$? Cómo podemos conocerlo?
  - Como vimos antes, la correlacion (o no correlacion) entre los eventos modifica la estadistica.
  - En la practica, eventos "no correlacionados" son eventos con $t_c < 1/f$ que implica $t_c \ll 1/f$.
  - A veces podemos inferirlo a partir del conocimiento de la fisica involucrada
  - En algunos casos podemos medirlo.



M. Alberici y J. Catoni, Informe Labo 5 2018

Amplificación y conformación de pulsos

Detector

- Cómo elegimos el **detector** y configuramos **la señal**?
  - El detector debe ser sensible a los eventos en cuestión, y entregar una señal detectable. Esto muchas veces requiere una **amplificación.**
  - La amplificación va a estar limitada por la saturación del propio detector y del **sistema de adquisicion**. Es muy importante corroborar que la parte relevante de la señal **no sature** en alguna etapa.

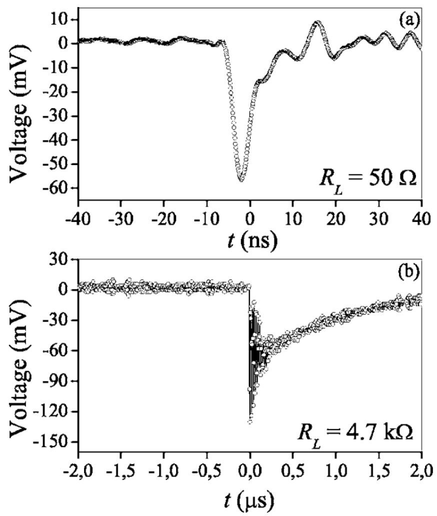
- Para poder contar eventos necesitamos **identificar pulsos.** El **ancho temporal de los pulsos** τ va a estar determinado generalmente por el **tiempo caracterisitco de la electrónica** utilizada.
- En algunos casos los pulsos originales que salen del detector pueden ser leidos directamente por el sistema de adquisicion. En otros casos los tenemos que conformar.
- "**Conformar los pulsos**" significa transformarlos en pulsos de amplitud y ancho suficiente para ser detectados por nuestro sistema de adquisicion. Por otro lado, deben ser suficientemente angostos como para que no se superpongan ($\tau \ll 1/f$).

Conformacion de pulsos

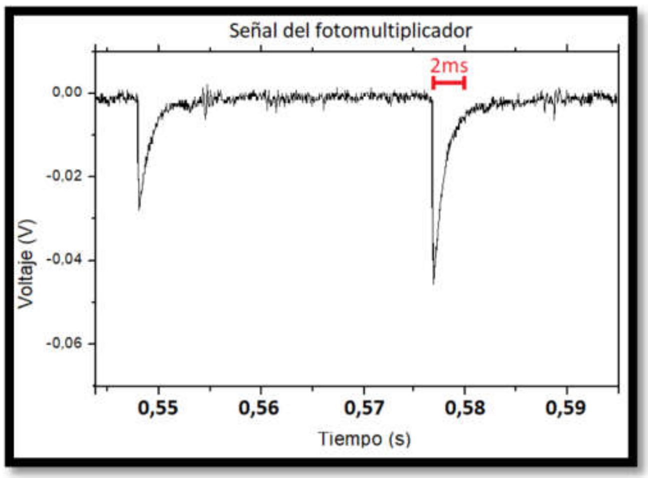
Amplificación y conformación de pulsos

Conformacion de pulsos

- Cómo se pueden conformar los pulsos?
  - Los pusos que salen del detector pueden adicionalmente amplificarse o reducirse.
  - El ancho temporal y forma puede modificarse mediante circuitos simples (cambiando el tiempo caracteristico con una resistencia de carga) o con electrónica sofisticada.



M. L. Martínez Ricci et al., Am. J. Phys. **75** ,2007



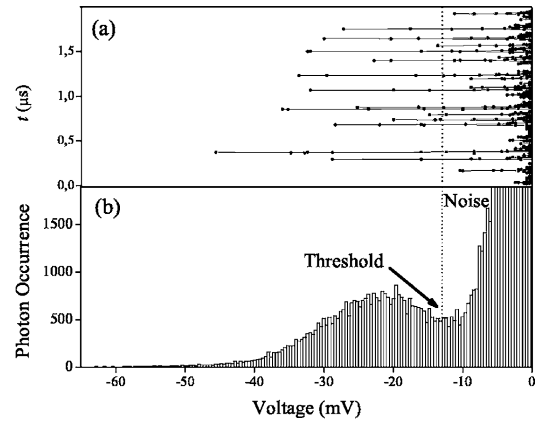
M. Koifman y G. Perna, Informe Labo 5 2018

Relación señal-ruido y cuentas espúreas

- Cómo separamos los **datos relacionados con eventos** del **ruido**?
  - Mediante la amplificacion tenemos que lograr diferenciar la señal del ruido.
  - En algunos caso podemos usar filtros

ruido

Eventos espureos



M. L. Martínez Ricci et al., Am. J. Phys. **75** ,2007

- Aun separando la señal del ruido, parte de los eventos pueden ser espureos, en el sentido de que no son generados por nuestro sistema estocastico a estudiar, sino que son eventos del mismo tipo pero generados en otra fuente o por otro proceso.
- Cómo podemos deshacernos de señal espurea que no proviene del experimento (fondo).
  - Una posibilidad es caracterizar el fondo (sin fuente) y restarlo.

Histograma

- Cómo elegimos el ancho de cada columna (bin) para organizar los datos adquiridos?
  - No hay una receta única, el criterio del experimentador es central. Hay algunas reglas que pueden ayudar:
  - Regla 1: la separación entre columnas tiene que ser mayor que la incerteza experimental de cada dato individual.
  - Regla 2: El numero de datos en cada columna debe ser significativo, para reducir la incerteza estadistica asociada (10 datos tienen una incerteza asociada de $\sim$30%)
  - Regla 3: El ajuste de la distribucion va a ser mejor cuanto mas columnas tenga el histograma, siempre y cuando se cumpla con las reglas 1 y 2.
  - Regla 4: Ninguna conclusion fisica deberia variar significativamente al cambiar la binarizacion del hitograma dentro de los rangos correctos.

Ajustes

- Una vez que tenemos un histograma, el ajuste de los datos estadistico por una función de distribución es similar al ajuste de datos adquiridos en un experimento deterministas por una funcion $y(x)$. y_i es la altura normalizada de cada columna n_i/N y x_i es el valor medio que identifica cada columna. Hay rutinas de python, mathlab, origin, que realizan este procedimiento en forma automatica. En todos los casos:
- Lo que sigue es valido para cualquier ajuste, se trate de un experimento estocastico o "determinista".
- Proponemos una función de ajuste, que puede ser una distribucion (por ejemplo Gaussiana).
- El programa encuentra los parametros de la distribucion (en el ejemplo media, varianza y normalizacion) que minimizan la distancia de los datos experimentales con el ajuste propuesto.
- Esa minimización se hace encontrando los parámetros que minimizan χ^2_ν .

$$\chi^2 \equiv \sum \left\{ \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - y(x_i)]^2 \right\} \qquad \chi^2_\nu = \frac{\chi^2}{\nu}$$

Cómo sabemos si el ajuste es bueno?

Veamos un poco mas en detalle de que se trata este estimador

Ajustes

$$s^2 = \frac{1}{N-m}\frac{\Sigma\{(1/\sigma_i^2)[y_i - y(x_i)]^2\}}{(1/N)\Sigma(1/\sigma_i^2)} = \frac{1}{N-m}\sum w_i[y_i - y(x_i)]^2$$

Varianza del ajuste:Es una medida de la dispersion de los datos respecto de la funcion $y(x)$ propuesta, con m parametros libres a_k. **Aumenta si $y(x)$ no es un buen ajuste Y si los datos estan dispersos**.

$\nu = N - m$ grados de libertad.

$$\langle\sigma_i^2\rangle = \frac{(1/N)\Sigma((1/\sigma_i^2)\sigma_i^2)}{(1/N)\Sigma(1/\sigma_i^2)} = \left[\frac{1}{N}\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\right]^{-1}$$

Varianza media de los datos: **Aumenta con la dispersion y/o la incerteza de los datos**. Es una caracteristica de la distribucion de los datos y es independiente del ajuste.

Si $y(a_k, x)$ es lineal en a_k hay una relacion matematica sencilla entre estos estimadores y χ^2_ν.

$$\chi^2 \equiv \sum\left\{\frac{1}{\sigma_i^2}[y_i - y(x_i)]^2\right\}$$

$$\chi^2_\nu = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{s^2}{\langle\sigma_i^2\rangle}$$

Es un estimador de la bondad del ajuste

Si las incertezas estan bien estimadas deberia ser independiente de las mismas. Para ajuste optimo $s^2 \sim \sigma^2$ y $\chi^2_\nu \sim 1$.

Si el ajuste no es bueno $\chi^2_\nu \gg 1$

Si $\chi^2_\nu < 1$ las incertezas estan subestimadas.

Bondad de ajuste y aceptacion de hipotesis

- Cuan cerca de 1 tiene que estar χ^2_ν para decir que el ajuste es “bueno”?
- Esto es un ejemplo de una situacion mas general: como decidir si una hipotesis (en este caso la funcion de ajuste propuesta) es razonable?
- Podemos cuantificar “la bondad” de un ajuste?