

II. Formalismo de matrices ABCD para propagación de rayos de luz y haces gaussianos. Cavidades estables y modos confinados.

Miguel A. Larotonda

Febrero 2024

Repasamos un método para obtener la evolución de rayos ópticos y de haces gaussianos a través de un sistema óptico, basado en matrices 2x2 que definen distintos componentes ópticos. Además mostramos cómo este formalismo permite encontrar la solución estable de modos confinados en cavidades láser.

1 Introducción

Una cavidad óptica (o cavidad resonante, o cavidad Fabry-Pérot) es un arreglo de espejos, cristales y otros componentes ópticos que forman una cavidad resonante para ondas ópticas. Este tipo de resonadores para ondas electromagnéticas son uno de los componentes principales de un láser: el medio de ganancia o medio activo se ubica dentro de la cavidad, y ésta le da la realimentación que produce la emisión estimulada, además de definir un modo de propagación de la luz confinado radialmente. Las cavidades ópticas también se usan en otros sistemas ópticos activos, como los osciladores paramétricos, y pasivos, como interferómetros. La radiación confinada en estas cavidades se refleja en los espejos varias veces, produciendo modos con frecuencias de resonancia definidas. Los modos de estas cavidades se pueden descomponer en una parte longitudinal, que difieren entre ellos en la frecuencia, y modos transversales, que tienen distintos patrones de intensidad en la sección del haz. El modo fundamental confinado en una cavidad estable con simetría cilíndrica es un modo con perfil gaussiano.

En general, las cavidades ópticas se diseñan para tener un factor de calidad ($Q = \nu/\Delta\nu$) grande; por lo tanto pueden confinar un haz en su interior mientras éste se refleja varias veces con muy baja atenuación. Esto hace que el ancho de línea de las frecuencias resonantes $\Delta\nu_{\text{cav}}$ pueda ser muy pequeño; mucho menor que el ancho de banda de la transición radiativa del medio activo $\Delta\nu_{\text{rad}}$.

Una clasificación relevante de estas cavidades es si son estables o inestables. Una cavidad estable es aquella que puede confinar un rayo de luz (o un haz láser) durante una cantidad arbitrariamente grande de tránsitos por la misma –a menos de las pérdidas–, manteniendo al campo electromagnético siempre cerca del eje de propagación. En una cavidad inestable en cambio, el haz en sucesivos pasajes va extendiendo su distribución de energía cada vez más lejos del eje óptico, eventualmente escapando del área de los espejos. En cierto tipo de láseres –pulsados, con mucha ganancia– estas cavidades son preferidas, pero en general se busca que un láser tenga una cavidad estable.

Para obtener las condiciones de estabilidad, dado el arreglo de componentes ópticos, se puede usar el formalismo de matrices $ABCD$, que vamos a ver a continuación. Esta herramienta fue desarrollada inicialmente para estudiar trayectorias de rayos en sistemas ópticos, en el marco de la óptica geométrica [1], pero en la década del 60 se mostró que servía para estudiar cavidades láser y propagación de haces gaussianos [2, 3]. Posteriormente, con la aparición de láseres pulsados por mode-locking se extendió el formalismo a la parte temporal (*ray-pulse matrices*) para modelar efectos de dispersión y no lineales sobre el ancho de pulsos de láseres de pulsos cortos y ultracortos [4].

2 Trazado de rayos. Matrices $ABCD$

El análisis de matrices de transferencia de rayos (también conocido como análisis de matrices $ABCD$) es una forma matemática de realizar cálculos de trazado de rayos en problemas que pueden ser resueltos usando óptica paraxial (ángulos pequeños respecto del eje óptico). En este formalismo, cada elemento

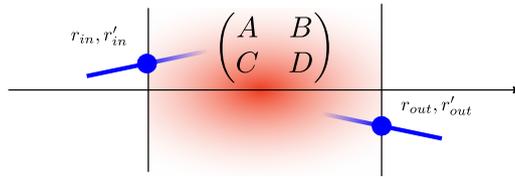


Figura 1: Transformación que lleva los parámetros de un haz a la entrada de un componente óptico a los de salida, por medio de una matriz $ABCD$.

óptico (superficies, interfases, elementos refractivos como lentes, espejos planos o curvos, propagación libre) está descrito por una matriz de 2×2 que opera sobre un vector que describe al rayo de luz incidente, para dar como resultado los parámetros que caracterizan al rayo de luz resultante. Un sistema óptico completo compuesto por una sucesión de elementos ópticos se puede describir multiplicando las matrices sucesivas de todos los componentes. Notablemente, estas matrices también se pueden usar para resolver problemas de propagación de haces gaussianos (solución típica del campo electromagnético generado por un láser).

Consideremos un rayo paraxial¹ que atraviesa un elemento óptico. Si z es el eje de simetría cilíndrica del problema, a este rayo a la entrada del componente se lo puede definir a partir de la distancia del rayo al eje, r y su pendiente $dr/dz = r'$. La idea del formalismo es obtener una matriz de 2×2 que relacione los parámetros a la salida del elemento óptico, (r_{out}, r'_{out}) con los parámetros a la entrada (r_{in}, r'_{in}) (figura 1) de la forma

$$\begin{vmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{vmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Supongamos que tenemos una lente de distancia focal f . Las relaciones entre las distancias al eje z y las pendientes a la entrada y a la salida de la lente se pueden escribir

$$\begin{aligned} r_{out} &= r_{in}, \\ r'_{out} &= r'_{in} - \frac{r_{in}}{f}. \end{aligned} \quad (2)$$

La primera de las relaciones se obtiene directamente de la definición de lente delgada, y la segunda se puede deducir del trazado de los rayos principales que se usan usualmente para la formación de imágenes. Las relaciones (2) se pueden reescribir usando álgebra de multiplicación de matrices como

$$\begin{vmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

donde $f > 0$ para lentes convergentes y $f < 0$ para lentes divergentes [figura 2a)].

De la misma forma, para un haz que se propaga libremente una distancia d , se pueden obtener las relaciones

$$\begin{aligned} r_{out} &= r_{in} + d r'_{in}, \\ r'_{out} &= r'_{in}. \end{aligned} \quad (4)$$

Al igual que con el caso de la lente delgada, se puede obtener la matriz característica de la propagación libre como

$$\begin{vmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{vmatrix} \quad (5)$$

como se representa en la figura 2b).

A las matrices que describen distintos elementos ópticos como las definidas en (3) y 5) se las llama matrices $ABCD$. En la tabla 1 se muestran matrices $ABCD$ para distintos elementos ópticos. Una propiedad importante de estas matrices es que el determinante de las mismas es igual al cociente entre los índices de refracción a la entrada y a la salida, n_{in}/n_{out} . Si el índice es el mismo a la entrada y a la salida (la situación más común), esta propiedad se reduce a

$$\det(M) = AD - BC = 1. \quad (6)$$

¹El ángulo de propagación de un haz paraxial respecto del eje óptico cumple $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$

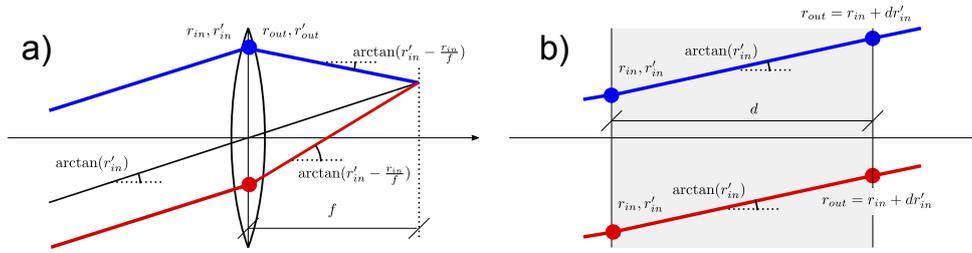


Figura 2: Efecto de una lente delgada de distancia focal f y una propagación libre sobre una distancia d sobre un haz de luz definido a partir de su posición y derivada respecto del eje óptico z

EJEMPLO 1: la matriz correspondiente a una propagación durante una distancia d_1 , seguida por la refracción en una lente de distancia focal f y posteriormente otra propagación una distancia d_2 se escribe:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - d_2/f & d_1 + d_2 - d_1 d_2/f \\ -1/f & 1 - d_1/f \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Si queremos saber qué pasa con una lente en configuración $2f-2f$, $d_1 = d_2 = 2f$ y entonces la matriz del sistema queda

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

EJERCICIO 1: Calcular qué pasa en el plano de salida con:

- un haz colimado ($r_{in} = x, r'_{in} = 0$),
- un haz que pasa por el eje óptico con pendiente arbitraria ($r_{in} = 0, r'_{in} = m$) y
- un haz que cruza por el centro de la lente ($r_{in} = x, r'_{in} = -x/2f$).

x y m son una posición y una pendiente arbitrarias, respectivamente.

Este formalismo de matrices no sólo sirve para obtener la evolución de un rayo de luz a través de un sistema óptico, sino que, como veremos a continuación, también puede calcular la evolución de soluciones del campo electromagnético relacionadas con los modos transversales de un láser. Además, permite encontrar las condiciones para que una cavidad sea estable, es decir que sea capaz de confinar un modo transversal electromagnético (TEM).

3 Haces gaussianos. El parámetro gaussiano q

Un haz láser tiene bastantes similitudes con una onda plana. Sin embargo su distribución de intensidad no es uniforme; se concentra cerca del eje de propagación (perfil gaussiano) y el frente de fase en general no es plano. Cerca del eje óptico, al modo óptico propagante de un láser o haz Gaussiano se lo puede considerar como un campo transversal electromagnético (onda) con frente de fase esférico o casi esférico y una distribución de campo transversal descrita por funciones de Laguerre-Gauss o de Hermite-Gauss [5]. Los dos parámetros de interés son: el ancho característico del haz en el plano transversal (el tamaño del haz) y el radio de curvatura del frente de fase. Vamos a plantear sin mucho detalle las ecuaciones que gobiernan el proceso y la solución de primer orden conocida como modo gaussiano de primer orden.

Un campo de luz coherente satisface la siguiente ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (9)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es la constante de propagación en el medio. A esta ecuación se llega a partir de las ecuaciones de Maxwell en un medio isótropo y homogéneo, y proponiendo una solución del campo EM a

variables separadas $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \text{Re} [u(x, y, z)e^{i\omega t}]$. Para luz que viaja en la dirección z se propone:

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z)e^{ikz}, \quad (10)$$

donde ψ es una función compleja lentamente variable que representa la diferencia entre un haz láser y una onda plana: distribución de intensidad no uniforme y divergencia o extensión transversal del haz con la distancia de propagación (y por ende necesariamente una curvatura del frente de fase). Reemplazando (10) en (9) se obtiene la *ecuación paraxial de Helmholtz*:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Para llegar a este resultado se asume que la función varía suavemente en la dirección z por lo que se desprecia $\partial^2 \psi / \partial z^2$. La resolución de esta ecuación se discute en forma detallada en Ref. [6], y la solución completa es

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left\{ -i [kz - \eta(z)] - r^2 \left[\frac{1}{\omega^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right] \right\} \\ &= u_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left\{ -i [kz - \eta(z)] - i \frac{kr^2}{2} \frac{1}{q(z)} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Este es un resultado importante y práctico. Aparecen definidos varios parámetros nuevos, algunos con significado físico y otros de relevancia práctica. La solución $u(x, y, z)$ tiene simetría de revolución en el plano transversal al eje de propagación. Esencialmente es un producto de un término oscilatorio, una amplitud de normalización, y un término con dependencia cuadrática radial, con parte real e imaginaria. El tamaño transversal o *spot size* del haz está dado por $\omega(z)$:

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi n \omega_0^2} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right). \quad (13)$$

Corresponde a la distancia sobre el plano transversal desde el eje de propagación en la cual la amplitud del campo es un factor $1/e$ menor que el valor en el centro.

A diferencia de lo que ocurre en el marco de la óptica geométrica, en la que se suponen frentes de onda infinitamente extendidos en el plano transversal a la propagación, el haz gaussiano está confinado o limitado transversalmente. La extensión finita del modo gaussiano tiene como consecuencia inmediata que en el foco, el campo no se concentre en un punto como predice la óptica geométrica, sino en una mancha de un tamaño finito, definido por la distancia focal de la óptica utilizada y por el tamaño inicial del haz. El parámetro ω_0 es el mínimo valor que toma el tamaño del haz, y se lo denomina "cintura" del haz. Lejos de la cintura, el haz diverge angularmente con un ángulo definido por difracción, a través del factor λ/ω_0 .

El radio de curvatura del frente de onda, $R(z)$, es

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi n \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right). \quad (14)$$

El frente de onda de un haz gaussiano es (casi) esférico, salvo en la región cercana a $z = 0$. En realidad es un frente parabólico, ya que está definido a partir de $k [z + r^2/2R] = \text{constante}$, pero la diferencia entre un frente esférico y uno parabólico es despreciable para $r^2 \ll z^2$.

Inspeccionando la expresión (14) se puede ver que el radio de curvatura R diverge ($\rightarrow \infty$) sobre la cintura (frente de onda plano), y lejos de la cintura crece como la distancia al plano de la misma: $R \approx z$ para $z \gg z_0$.

Al parámetro z_0 se lo conoce como largo de Rayleigh, y queda determinado por la longitud de onda del campo, por la cintura del haz ω_0 y el índice de refracción n :

$$z_0 = \frac{\pi n \omega_0^2}{\lambda}; \quad (15)$$

es la distancia medida sobre la dirección de propagación del haz, desde la cintura al punto en el que se duplica el área del haz. A veces se caracteriza esta condición con el llamado "parámetro confocal" b , que es $b = 2z_0$. Es una medida práctica de la distancia sobre el eje de propagación en la que un haz "permanece enfocado". En la figura 3 se muestra gráficamente el significado de estos parámetros y la dependencia del tamaño del haz y el radio de curvatura con la distancia de propagación.

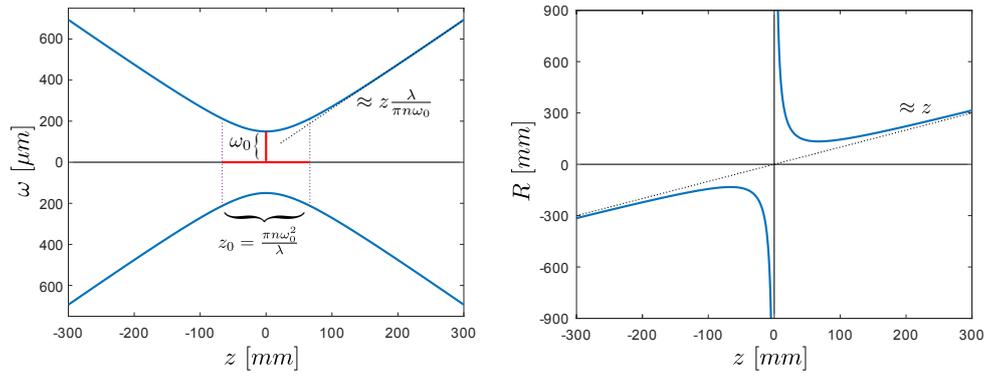


Figura 3: Evolución de los parámetros del haz gaussiano $\omega(z)$ y $R(z)$. La relación entre la cintura ω_0 , el largo de Rayleigh z_0 y la divergencia del haz está regida por la difracción del haz de extensión transversal finita. Para este cálculo se utilizó $\lambda = 1064 \text{ nm}$ y $\omega_0 = 150 \text{ } \mu\text{m}$

Además de estas definiciones y parámetros con sentido físico, en la ecuación (9) se define el parámetro del haz gaussiano q (una cantidad con parte real e imaginaria), que retiene las características principales de un haz gaussiano, el tamaño del haz y el radio de curvatura del frente de fase:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega^2(z)} \quad (16)$$

El parámetro complejo q es el que modula el perfil transversal del haz en amplitud y fase. Varía con la posición en el eje de propagación z , según las expresiones (13) y (14), describiendo evolución del haz gaussiano en una propagación libre. Asimismo, cuando un haz gaussiano atraviesa una lente, se forma una nueva cintura, y los parámetros del haz cambian, como veremos en la siguiente sección.

Finalmente queda por comentar brevemente el término de fase $\eta(z)$, conocido como *Guoy shift*:

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi n \omega_0^2}\right) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (17)$$

El desplazamiento de fase de Guoy es una propiedad física fundamental de cualquier tipo de onda sujeta a algún tipo de confinamiento espacial transversal, como por ejemplo enfoque o difracción en una abertura: una onda plana que se propaga en la dirección z acumula una fase zk . Para haces de extensión transversal finita esto no se cumple en forma exacta, y la evolución de la fase se aparta de la de una onda plana. El avance de fase por unidad de longitud no es constante, particularmente alrededor del foco. Es todo lo que vamos a decir acá respecto de este término; para más información se pueden ver Refs. [7, 8].

4 Ley *ABCD*

En analogía con lo expuesto en la sección 2, la idea es disponer de un formalismo práctico que permita obtener la transformación que sufre el parámetro gaussiano generada por los distintos elementos ópticos que atraviesa el haz. No vamos a hacer la deducción acá (se puede ver en [6, 3]) pero este formalismo existe, y se lo llama regla *ABCD* (*ABCD law*): si llamamos q_{in} al parámetro gaussiano de un haz a la entrada de un elemento óptico descrito por una matriz *ABCD*, y q_{out} al de salida, la relación que los vincula es [3].

$$q_{out} = \frac{Aq_{in} + B}{Cq_{in} + D}, \quad (18)$$

o, más práctico, en función de $1/q$:

$$1/q_{out} = \frac{C + D 1/q_{in}}{A + B 1/q_{in}}. \quad (19)$$

De esta forma, el parámetro complejo que describe un haz gaussiano a la entrada y a la salida de un elemento óptico como los listados en la tabla 1 quedan relacionados a través de esta transformación bilineal. Es una herramienta muy poderosa para calcular la forma de un haz gaussiano que atraviesa un sistema complicado (o no) de lentes y espejos, como vamos a ver a continuación.

EJEMPLO 2: enfoque de un haz gaussiano “colimado” con una lente convergente. Este ejemplo es simple pero alcanza para ver la potencia del método. Supongamos que tenemos un haz gaussiano (de un láser He-Ne; $\lambda = 633$ nm), colimado o con divergencia muy baja, de aproximadamente 1 mm de diámetro. Qué le pasa después de atravesar una lente convergente? ¿Dónde estará el foco, y cuál será el tamaño del haz? (recordemos que en el formalismo de óptica geométrica, un haz infinitamente extenso y colimado que incide sobre una lente se enfoca sobre **un punto** a una distancia igual a f , la distancia focal de la lente) En el plano de entrada, el haz tiene un tamaño ω_{in} , y como está prácticamente colimado, podemos decir que $1/R_{in} \approx 0$. El medio es aire así que $n \approx 1$. Entonces

$$1/q_{in} = \frac{1}{R_{in}} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega_{in}^2} \approx -i \frac{\lambda}{\pi \omega_{in}^2}. \quad (20)$$

queremos saber qué ocurre con el haz luego de pasar por una lente y propagarse una distancia arbitraria, sobre el eje z . La matriz resultante consiste en primero incluir una lente de distancia focal f y luego propagar una distancia u . Usando (3) y (5) esta evolución se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u}{f} & u \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Al aplicar la ley $ABCD$ (19), obtenemos

$$\frac{1}{q_{out}} = \frac{1}{R_{out}} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{out}^2} = \frac{-\frac{1}{f} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{in}^2}}{\left(1 - \frac{u}{f}\right) - i \frac{u \lambda}{\pi \omega_{in}^2}}. \quad (22)$$

Esta expresión contiene un cociente de números complejos de la forma $(a + ib) / (c + id)$. Después de un poco de manipulación se reescribe de la forma $[(ac + bd) - i(bc - ad)] / (c^2 + d^2)$ y se identifican los parámetros del haz a partir de la parte real e imaginaria:

$$R_{out}(u) = \frac{\left(1 - \frac{u}{f}\right)^2 + u^2 \left(\frac{\lambda}{\pi \omega_{in}^2}\right)^2}{u \left[\frac{1}{f^2} + \left(\frac{\lambda}{\pi \omega_{in}^2}\right)^2\right] - \frac{1}{f}} \quad (23)$$

y

$$\omega_{out}(u) = \omega_{in} \sqrt{\left(1 - \frac{u}{f}\right)^2 + u^2 \left(\frac{\lambda}{\pi \omega_{in}^2}\right)^2}. \quad (24)$$

De (23) se ve que para $u = 0$ (la posición inmediatamente después de la lente), el radio de curvatura es $R_{out} = -f$ y el tamaño del haz sigue siendo ω_{in} . Para encontrar la posición de la cintura, hay que recordar que sobre la misma, el radio de curvatura es infinito. Entonces buscamos el valor de u que anula el denominador de (23):

$$u_0 = f \left[\frac{1}{1 + f^2 \left(\frac{\lambda}{\pi \omega_{in}^2}\right)^2} \right] \quad (25)$$

que es “casi” la distancia focal de la lente. En esta ubicación, el tamaño del haz toma su valor mínimo (la cintura), que es

$$\omega_0 = \frac{\lambda f}{\pi \omega_{in}} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda f}{\pi \omega_{in}^2}\right)^2} \quad (26)$$

Es interesante comparar este resultado con el tamaño del disco de Airy generado por un frente plano que incide sobre una lente de distancia focal f y diámetro D : el radio r del disco de Airy en el plano focal de la lente es [1]

$$r = 1.22 \frac{\lambda f}{D}. \quad (27)$$

El tamaño de este disco se dice que está *limitado por difracción*. Es el más pequeño posible y marca

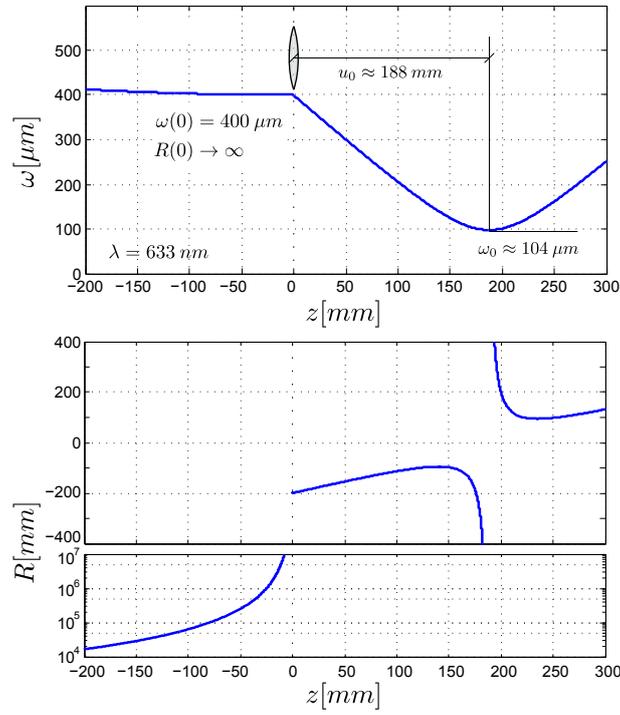


Figura 4: Evolución de un haz gaussiano aproximadamente colimado con tamaño de haz $\omega_{in} = \omega(z = 0) = 400 \mu\text{m}$ al incidir sobre una lente convergente de $f = 200 \text{ mm}$ y propagarse libremente. El haz se enfoca (converge) hasta llegar a su tamaño mínimo (la cintura, ω_0) y luego se desenfoca nuevamente. Las distancias sobre el eje de propagación se miden desde la ubicación de la lente ($z = 0$). Notar que debido a la extensión finita del haz en el plano transversal, no existe un haz *perfectamente colimado*; la condición de $1/R = 0$ es asintótica.

el límite de resolución de un sistema óptico. La aparición de una limitación en el tamaño (límite de difracción) viene del confinamiento del haz: el campo tiene una extensión finita en el plano transversal. Un haz láser o haz gaussiano también presenta este confinamiento transversal, por lo que el tamaño de la cintura también está acotado inferiormente por la difracción. En la figura 4 se muestra la evolución del radio de curvatura y del tamaño del haz al incidir en una lente de distancia focal $f = 200 \text{ mm}$ y luego propagarse libremente. Los parámetros del haz usados son $\lambda = 633 \text{ nm}$, $\omega_{in} = 400 \mu\text{m}$. En este caso, usando (25) y (26) el “foco” del haz (la cintura) tiene un radio $\omega_0 \approx 104 \mu\text{m}$ y se ubica a $u_0 \approx 188 \text{ mm}$ de la lente.

Resumiendo entonces, si se conocen los parámetros que definen un haz gaussiano ω y R en forma numérica, teórica o experimental, es posible calcular a partir de ellos la evolución del haz por un sistema óptico usando las matrices $ABCD$ del mismo. El radio de curvatura es una cantidad difícil de medir, pero si uno elige como plano de medición el de una cintura del haz, puede despreciar el término real de $1/q$, ya que el radio de curvatura es muy grande sobre ese plano. Como comentario final, el modo gaussiano no es la única solución de la ecuación 11. De hecho es el modo fundamental de distintas familias de modos transversales: las funciones de Hermite-Gauss y de Laguerre-Gauss. Estas últimas tienen simetría cilíndrica, y son funciones gaussianas moduladas por polinomios de Hermite(Laguerre) [5]. La diferencia operativa más notable es que en una cintura, el tamaño de la misma disminuye con el orden del polinomio: la menor cintura corresponde al modo gaussiano. En otras palabras, la estructura espacial más compleja de los modos de mayor orden producen una mayor extensión transversal del modo en el plano de Fourier (el foco de la lente). La transformación (19) es una herramienta práctica y simple de usar. Además de la aplicación que acabamos de ver, esta “ley $ABCD$ ” permite obtener la condición de estabilidad de una cavidad láser, y en el caso de ser estable, el modo gaussiano aceptado por esa cavidad, como veremos a continuación.

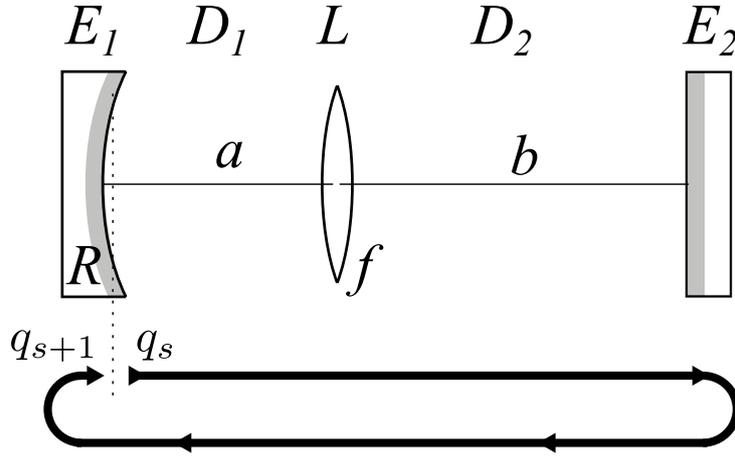


Figura 5: Esquema de una cavidad láser compuesta por un espejo curvo E_1 , una lente L y un espejo plano E_2 , separados entre sí por distancias D_1 y D_2 . Para construir la matriz de ida y vuelta se elige arbitrariamente un plano transversal y se multiplican las matrices de cada elemento óptico en un tránsito completo por la cavidad. El plano de trabajo elegido es arbitrario.

5 Análisis de estabilidad de una cavidad resonante. Modo resultante confinado

Este formalismo es también particularmente útil a la hora de modelar y predecir el comportamiento de la luz dentro de resonadores ópticos como las cavidades de un sistema láser. En su versión más simple una cavidad resonante para un láser consiste en un par de espejos (uno de ellos con reflectividad menor que el 100% que funciona como espejo de salida) separados una cierta distancia. Pero pueden ser configuraciones más complicadas, incluso “plegadas” con varios espejos de distintos radios de curvatura, incluir componentes intracavidad en ángulo de Brewster, o –menos usualmente– lentes intracavidad. Incluso para las cavidades más simples, no cualquier configuración resulta estable, en el sentido que sea capaz de confinar indefinidamente un haz de luz sin que éste se aleje del eje óptico con cada ida y vuelta en el resonador.

Un resonador se puede describir como una sucesión de componentes ópticos y tramos de propagación libre. En la figura 5 se muestra un ejemplo de una cavidad con un espejo plano, otro curvo y una lente en el medio. La matriz de tránsito completo (de *round trip* o de ida y vuelta) se construye partiendo de una posición en la cavidad (q_s) y recorriéndola una vez en forma completa, hasta llegar al mismo punto de partida, pero luego de un tránsito completo (q_{s+1}). Para el ejemplo de la figura 5, la matriz de ida y vuelta es el producto de la secuencia

$$\begin{aligned}
 M &= E_1 \cdot D_1 \cdot L \cdot D_2 \cdot E_2 \cdot D_2 \cdot L \cdot D_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)
 \end{aligned}$$

Esta matriz representa una distancia de propagación a , seguida por la refracción en una lente de distancia focal f , luego por una propagación sobre una distancia b , una reflexión en un espejo plano (la matriz de un espejo plano, es decir $R = \infty$ es la matriz identidad), luego al volver otra propagación b sobre el brazo D_2 , luego nuevamente la lente, la propagación en D_1 y finalmente la reflexión en el espejo curvo E_1 .

Queremos saber qué combinaciones de componentes y distancias definen una cavidad estable, capaz de confinar un modo. Existen un par de formas de obtener esta información [6, 2]; la que se presenta a continuación permite además obtener los parámetros del haz del modo confinado (si es que la cavidad es estable). Si bien existen algunas reglas generales para saber *a priori* si una cavidad es estable o no, éstas sólo funcionan para configuraciones de cavidades de dos espejos.

Para que una cavidad sea estable, un modo del campo EM dentro de la misma debe reproducirse a sí mismo después de un *round-trip*. Por lo tanto, para **cualquier plano** de la cavidad debe cumplirse que

$$\frac{1}{q_{s+1}} = \frac{1}{q_s} = \frac{C + D \frac{1}{q_s}}{A + B \frac{1}{q_s}}. \quad (29)$$

La expresión (29) es una ecuación para q_s , que permite además de obtener el parámetro gaussiano, establecer las condiciones para que este parámetro esté bien definido, es decir, obtener la condición de estabilidad de la cavidad. Es un problema equivalente a resolver la ecuación de autovalores de la matriz M . Reescribimos y reorganizamos (29) para obtener

$$B \left(\frac{1}{q_s} \right)^2 + (A - D) \frac{1}{q_s} - C = 0. \quad (30)$$

cuya solución es

$$\left(\frac{1}{q} \right)_{1,2} = \frac{(D - A) \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2B} \quad (31)$$

y teniendo en cuenta que $\det(M) = AD - BC = 1$, se puede reescribir

$$\left(\frac{1}{q} \right)_{1,2} = \frac{(D - A)}{2B} \pm \frac{\sqrt{(A + D)^2 - 4}}{2B}. \quad (32)$$

Por comparación con la definición del parámetro gaussiano (16), la solución debe tener parte real y parte imaginaria, por lo que aparece la condición sobre el factor dentro de la raíz cuadrada:

$$(A + D)^2 - 4 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} |A + D| = \frac{1}{2} |\text{tr}(M)| \leq 1. \quad (33)$$

Esta es la condición de estabilidad de la cavidad: **el módulo de la traza de la matriz de roundtrip de la cavidad debe ser menor o igual que 2**. De otra manera, la cintura del haz no está definida, ya que el parámetro gaussiano no tiene parte imaginaria. Entonces, igualando (32) y (16) con la condición (33) nos queda

$$\frac{1}{q_{cav}} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega^2} = \frac{D - A}{2B} - i \frac{\sqrt{4 - (A + D)^2}}{2|B|}, \quad (34)$$

o, explícitamente, en el plano de cálculo elegido,

$$R = \frac{2B}{D - A}, \quad (35a)$$

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{\pi n} \frac{2|B|}{\sqrt{4 - (A + D)^2}}. \quad (35b)$$

El haz gaussiano confinado en una cavidad estable, definida a partir de su matriz de *round-trip* M está caracterizado sobre el plano de trabajo elegido por (34) o por las expresiones (35a) y (35b). La condición de estabilidad (33) depende de la traza de la matriz M . La traza de un producto de matrices es invariante ante variaciones cíclicas, es decir $\text{tr}(A \cdot B \cdot C) = \text{tr}(B \cdot C \cdot A) = \text{tr}(C \cdot A \cdot B)$, por lo que, como es esperable, la condición de estabilidad es independiente del plano de trabajo que se elija para realizar el cálculo. La elección del mismo depende de para qué plano se quieran conocer los parámetros del haz. Aunque, como vimos en la Sección 4, conociendo q en un plano, se puede propagar a cualquier otro plano sabiendo qué elementos ópticos hay que atravesar.

EJEMPLO 3: Supongamos que queremos armar una cavidad estable con una configuración como la definida en la figura 5, usando un espejo curvo E_1 de $R = 250$ mm de radio de curvatura y una lente L de $f = 0.5$ m = 500 mm de distancia focal. Queremos conocer las longitudes a y b de los brazos D_1 y D_2 con los que se puede armar una cavidad estable. Para ello hay que hacer el producto de las matrices (28), especificando los valores de R y f . Después de un poco de álgebra de matrices, obtenemos la traza de la matriz M :

$$\text{tr}(M) = 2 - \frac{a^2(b - 500)}{15625000} + \frac{a(b - 300)}{12500} - \frac{3b}{125}, \quad (36)$$

donde las distancias a y b están expresadas en milímetros.

La condición de estabilidad (33), $1/2 |\text{tr} M| \leq 1$ en función de los largos de los brazos de la cavidad se puede ver graficada en la figura 6. La zona sombreada corresponde a la condición estable, y las líneas de contorno indican el valor del módulo de $\text{tr} M/2$.

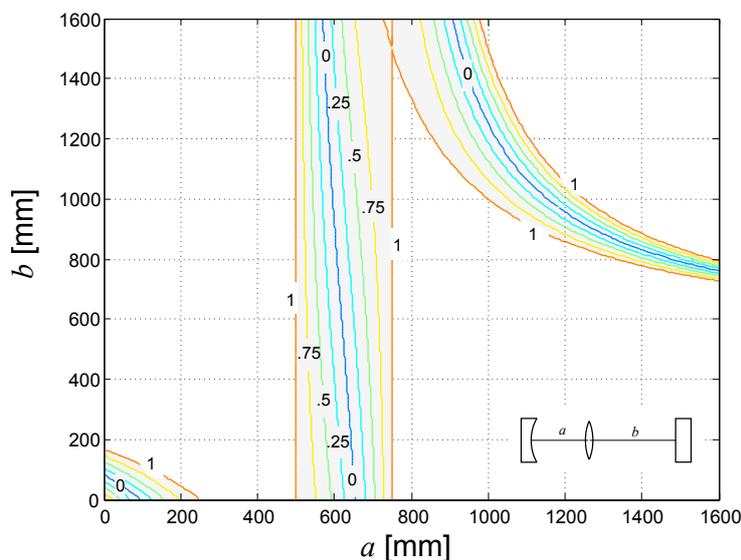


Figura 6: Regiones de estabilidad de la cavidad para distintas combinaciones de longitudes a y b .

Cualquier combinación de largos a y b sobre la zona grisada de la figura 6 define una cavidad estable, pero **ATENCIÓN**: Esto no significa necesariamente que el láser funcionará bien, sino que la cavidad así definida es capaz de confinar un modo. La eficiencia de un láser estará determinada por condiciones más sutiles, como por ejemplo cuán parecido es el modo gaussiano a la zona de bombeo en el medio activo, cuán grande o chico es el haz sobre los espejos, etc. Esa es otra discusión más compleja, que tiene que ver con el grado de “acople” o parecido entre la cavidad y su modo, y la región de ganancia. Lo que sí podemos decir es que si el par (a, b) cae fuera de la zona de estabilidad, es imposible obtener un modo confinado en esa cavidad, y será virtualmente imposible (al menos en un sistema de emisión continua como los del laboratorio) obtener emisión láser.

Por otro lado (y un poco relacionado con esto último) hay que tener en cuenta que las expresiones (34) o (35) permiten obtener el parámetro gaussiano del modo estable confinado en la cavidad en cualquier punto de la misma, usando la ley de propagación $ABCD$, ecuación (19).

EJEMPLO 4: Vamos a encontrar la forma que toma el modo confinado a lo largo de una cavidad estable; calcularemos la variación transversal del haz a lo largo de una cavidad estable definida por $a = 800$ mm, $b = 1400$ mm y el resto de los componentes ópticos descritos arriba, en el ejemplo anterior. Suponemos es un láser de Nd:YAG, por lo que $\lambda = 1064$ nm. Según la expresión de la matriz (28), el haz gaussiano obtenido corresponde al del plano inmediatamente posterior a la reflexión sobre el espejo curvo E_1 , con el haz propagándose hacia la derecha (Fig. 5). Para obtener el modo sobre

1. cualquier punto del brazo D_1 : propagamos $1/q$ sobre una distancia arbitraria x , $0 \leq x \leq a = 800$ mm.
2. cualquier punto del brazo D_2 : propagamos $1/q$ sobre una distancia $a = 800$ mm, luego por a través de la lente L y luego sobre una distancia arbitraria y , $0 \leq y \leq b = 1400$ mm.

Con este método podemos conocer la forma del haz en todos los puntos de la cavidad, a partir de conocer cómo es el haz sobre el espejo E_1 y saber cómo se modifica el parámetro gaussiano a lo largo de la cavidad. La figura 7 muestra el tamaño del haz y el radio de curvatura del modo estable para esta configuración.

La Fig. 7 permite apreciar que:

- El radio de curvatura del haz debe coincidir con el radio de los espejos que cierran la cavidad, E_1 y E_2 (no así sobre la lente o sobre un eventual espejo intermedio, que pliegue la cavidad): se puede ver que el radio de curvatura es de 250 mm sobre E_1 , y diverge sobre el espejo plano E_2 .

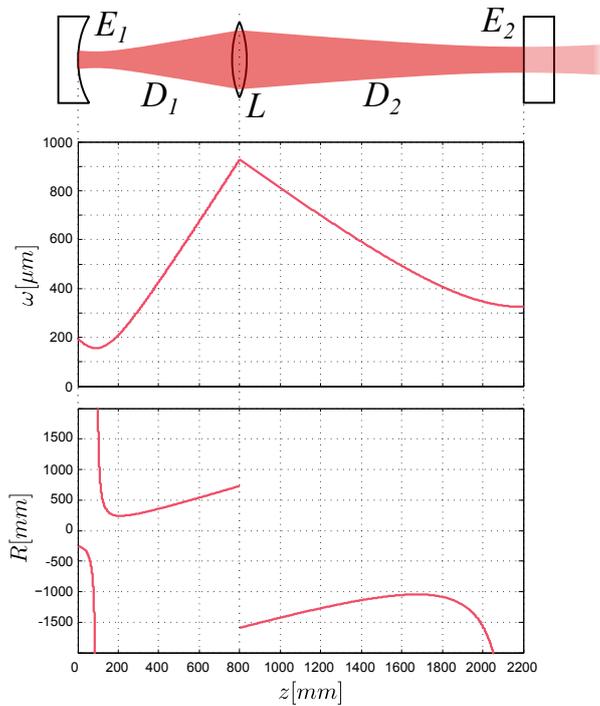


Figura 7: Modo confinado en la cavidad estable definida por un espejo de fondo curvo de $R = 250$ mm, una lente de $f = 500$ mm separados 800 mm, y un espejo plano a 1400 mm de la lente. La longitud total es de 2200 mm. En la parte superior se muestra una caricatura de la extensión radial del modo estable dentro de la cavidad.

- Una de las cinturas del haz se forma sobre el espejo plano E_2 , y la otra en algún punto entre E_1 y L (en este caso a unos 90 mm de E_2). Esto se ve como un mínimo del tamaño del haz y como una divergencia del radio de curvatura.

Hay que tener en cuenta que ESTE perfil transversal del haz confinado depende de la configuración específica de la cavidad (a, b) . Otra elección de parámetros a y b que también cumplan la condición de estabilidad llevará a un modo confinado distinto.

EJERCICIO 2: finalmente, suponiendo que el espejo plano E_2 es el espejo de salida, podemos ver cómo sería el modo de este láser *afuera* de la cavidad (que es la región a la que podemos acceder para medir, no es posible o al menos es muy complicado intentar medir propiedades del modo intracavidad, porque cualquier perturbación al modo inserta tantas pérdidas que probablemente el láser deje de funcionar). Para ver cómo es el haz afuera de la cavidad, hay que continuar con la propagación del haz gaussiano que ya conocemos: a partir del parámetro q calculado sobre el espejo E_1 , hay que propagarlo sobre una distancia $a = 800$ mm, luego por la lente L y posteriormente por una distancia $b = 1400$ mm. Así tenemos el haz sobre el espejo de salida E_2 : q_{salida} . Ahora hay que salir de la cavidad: si decidimos NO despreciar el tránsito por el vidrio del espejo, hay que propagar q_{salida} por una distancia e/n , donde e es el espesor del espejo (típicamente $e = 6$ mm) y n el índice de refracción del material ($n \approx 1.507$ para una longitud de onda de 1064 nm en vidrio BK7) y luego, ahora que ya estamos afuera de la cavidad, aplicamos una propagación por una distancia arbitraria v : $v = 0$ corresponde al haz afuera de la cavidad, sobre el espejo de salida y a medida que v crece se obtiene la forma del modo al alejarse de la cavidad. Pruebe al menos a plantear esta cuenta.

6 Astigmatismo, cavidades “plegadas”

La cavidad con la que se trabaja en el Laboratorio es una cavidad *plegada*, usando un espejo curvo en ángulo de incidencia no nulo: esto se utiliza para reemplazar la lente L del ejemplo de arriba (no es bueno intercalar elementos refractivos adentro de la cavidad, porque las reflexiones sobre sus caras imponen muchas pérdidas en sucesivos pasajes). Para poder usar un espejo y que el haz no se refleje sobre sí mismo, se lo ubica en ángulo, de manera que el ángulo de salida del eje óptico es el doble del ángulo de incidencia en el espejo. Así se pueden formar cavidades con varios espejos curvos, que produzcan múltiples cinturas intracavidad. En estas cinturas la intensidad del campo es muy grande, pues escala con el área del haz. Sobre ellas se pueden ubicar materiales no lineales, materiales con ganancia, etc. En la figura 8, (adaptada de [9]) se muestran dos configuraciones típicas de láseres de Ti:Zafiro.

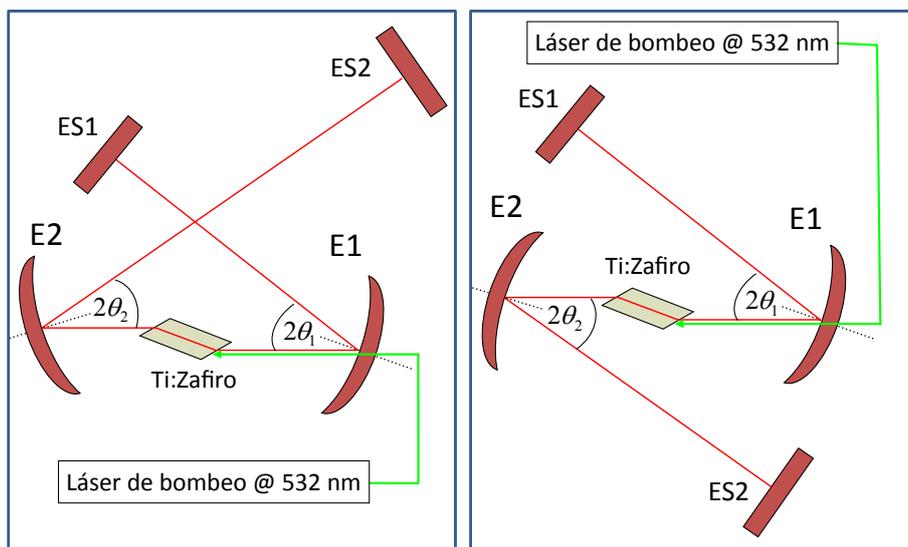


Figura 8: Dos esquemas típicos de cavidades para láseres de Ti:Zafiro. El astigmatismo introducido por el cristal del medio activo ubicado en ángulo de Brewster es compensado (parcialmente) por el astigmatismo producido por los espejos E_1 y E_2 . Figura adaptada de [9]

El problema es que el ángulo de incidencia grande sobre estos espejos introduce astigmatismo en la cavidad: el radio de curvatura efectivo en el plano sagital (el que contiene a los haces incidente y reflejado) es distinto que en el plano tangencial (el perpendicular al plano de incidencia). La cavidad “se desdobra” y pasa a tener dos diagramas de estabilidad (y dos modos confinados estables), uno para cada plano. Esta “no degeneración” o diferencia entre los dos planos aumenta al incrementarse el ángulo de incidencia del espejo, por lo que en general se trata de mantener estos ángulos lo más chicos posibles. Si el ángulo es pequeño se puede despreciar. Si el ángulo es grande, la cavidad alcanzará un límite geométrico de estabilidad en un plano antes que en el otro, y el modo se verá elongado en alguna dimensión.

Otro elemento que introduce astigmatismo es una lámina en incidencia en ángulo. En particular para incidencia en ángulo de Brewster (una condición común en componentes intracavidad, debido a que define una polarización para el láser y minimiza las pérdidas), la diferencia de longitud efectiva entre los dos planos es un factor $1/n^2$. Estas matrices, así como las de los espejos en ángulo de incidencia arbitrario se encuentran listadas en la tabla 1.

EJERCICIO 3: Plantee la matriz de la cavidad láser que tendrá que armar en el Laboratorio: despreciando el medio activo (puede considerarlo si quiere, 5 mm de Nd:YAG, $n = 1.82$), consta de un espejo plano, un espejo curvo de $R = 500$ mm en ángulo, que pliega la cavidad, y un espejo plano de salida, como en la figura 9. Trate de encontrar la condición de estabilidad en función de las distancias a y b . Puede suponer también que el ángulo de incidencia θ sobre el espejo curvo es despreciable.

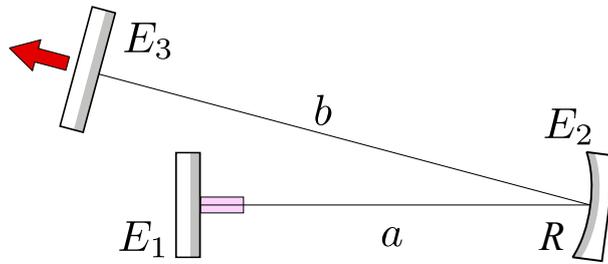


Figura 9: Esquema de la cavidad del láser del laboratorio. E_1 y E_3 son espejos planos. El radio de curvatura de E_2 es $R = 500$ mm. El medio activo (Nd:YAG) se ubica sobre el espejo E_1 (del lado de adentro de la cavidad), tiene 5 mm de largo y su índice de refracción es $n = 1.82$ para la longitud de onda del láser. Puede despreciar este elemento en una primera aproximación. El espejo de salida es E_3 .

7 Resumen

En este documento describimos un método práctico y bastante mecánico para propagar un rayo óptico o un haz gaussiano a través de un sistema óptico. También establecimos las condiciones para obtener una cavidad láser estable. Es interesante notar que el resultado es independiente de la longitud de onda de la luz, es decir que una cavidad estable, lo es en principio tanto para luz visible como para radiación en el rango de microondas, por ejemplo. Quien impone condiciones para que una cavidad real sirva para cierto rango del espectro electromagnético es el comportamiento de los materiales: reflectividad de las superficies, atenuación de distintos materiales, etc.

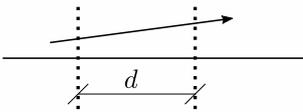
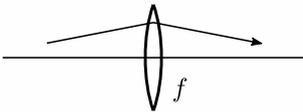
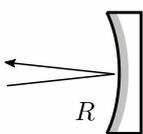
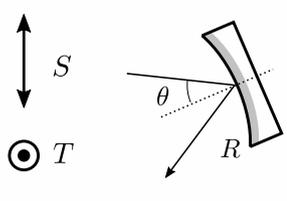
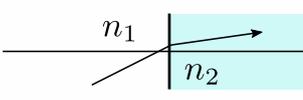
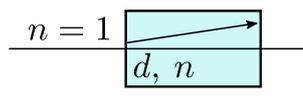
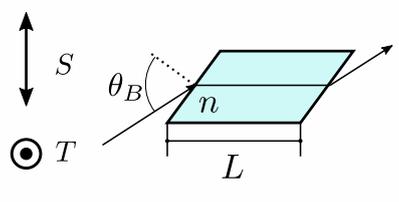
Lectura adicional

- B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, 2019 (recomendado).
- A. Yariv. *Quantum Electronics*. John Wiley & Sons, 1989 (muy bueno, puede resultar muy “cuántico”).
- A.E. Siegman. *Lasers*. University science books, 1986 (muy completo, difícil como primera lectura).
- R. Paschotta. *RP Photonics Encyclopedia*. https://www.rp-photonics.com/abcd_matrix.html.

Referencias

- [1] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson Education India, 2012.
- [2] Herwig Kogelnik and Tingye Li. Laser beams and resonators. *Applied optics*, 5(10):1550–1567, 1966. <https://doi.org/10.1364/AO.5.001550>
- [3] Herwig Kogelnik. Imaging of optical modes—resonators with internal lenses. *Bell System Technical Journal*, 44(3):455–494, 1965.
- [4] AG Kostenbauder. Ray-pulse matrices: a rational treatment for dispersive optical systems. *IEEE journal of quantum electronics*, 26(6):1148–1157, 1990.
- [5] Bahaa EA Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019. Capítulo 3.
- [6] Amnon Yariv. *Quantum electronics*. John Wiley & Sons, 1989. Capítulo 6.
- [7] Robert W Boyd. Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams. *JOSA*, 70(7):877–880, 1980.
- [8] Korbinian J Kaltenecker, Jacob C König-Otto, Martin Mittendorff, Stephan Winnerl, Harald Schneider, Manfred Helm, Hanspeter Helm, Markus Walther, and Bernd M Fischer. Gouy phase shift of a tightly focused, radially polarized beam. *Optica*, 3(1):35–41, 2016. <https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.000035>
- [9] Shai Yefet and Avi Pe’er. A review of cavity design for kerr lens mode-locked solid-state lasers. *Applied Sciences*, 3(4):694–724, 2013.

Tabla 1. Matrices $ABCD$ de distintos elementos ópticos comunes.

Propagación libre sobre una distancia arbitraria d	
	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Transmisión a través de una lente delgada de distancia focal f	
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
Reflexión sobre un espejo de radio R en incidencia normal	
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$
Reflexión sobre un espejo de radio R en ángulo de incidencia θ	
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix}_S$ (plano sagital)
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix}_T$ (plano tangencial)
Refracción sobre una superficie plana desde n_1 a n_2	
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$
Propagación en un material de longitud d e índice n	
	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Propagación en un medio con incidencia en ángulo de Brewster θ_B , longitud efectiva L	
	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_S$ (plano sagital)
	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n^3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_T$ (plano tangencial)