<u>Propagación de pulsos ópticos</u>

Láser, 2do cuatrimestre 2021

Prof. María Gabriela Capeluto

Vamos a analizar la propagación de un pulso en un medio no absorbente. Para dicho medio, la relación de dispersión es:

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

Un pulso óptico se puede pensar como una combinación de ondas planas

$$E(z,t) = \int E_o(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega) z)} d\omega = \int E_o(k) e^{i(\omega(k) t - kz)} dk$$

En donde $E_o(\omega)$ y $E_o(k)$ son las transformadas de $E(z=0,t) = E_o(t)$ en los espacios $\omega\ y\ k$ respectivamente

Supongamos que la frecuencia media ω_o y el vector de onda medio k_o son tales que

$$\Delta\omega \ll \omega_o$$

$$\Delta k \ll k_o$$

Puedo expandir en Taylor tanto la frecuencia como el número de ondas (arbitrariamente hasta orden 2)

$$\omega(k) \sim \omega_o + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_o (k - k_o) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_o (k - k_o)^2 = \omega_o + v_g (k - k_o) + \frac{\beta}{2}(k - k_o)^2$$

$$k(\omega) \sim k_o + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_o (\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 k}{d\omega^2}\right)_o (\omega - \omega_o)^2 = k_o + v_g^{-1}(\omega - \omega_o) + \frac{\Psi}{2}(\omega - \omega_o)^2$$

Llamaremos $\Psi = -\beta / v_g^3$ dispersión de velocidad de grupo (ahora vemos por qué)

1) **Efectos de primer orden: velocidad de grupo**

   Vamos a propagar el campo, teniendo en cuenta que la realción de dispersión es $\omega(k)$, expandida a primer orden en Taylor

$$E(z,t) = \int E_o(k) e^{i(\omega(k)t - kz)} dk = \int E_o(k) e^{i[\omega_o t + v_g (k - k_o) t - kz]} dk = e^{-i(k_o z - \omega_o t)} \int E_o(k) e^{i\,(v_g t - z)(k - k_o)} dk$$

O sea, es la antitrasformada de $E_o(k)$, evaluada en $z - v_g t$, por lo tanto

$$E(z,t) = e^{-i(k_o z-\omega_o t)} E_o\left(z - v_g t\right)$$

El primer término es la **Portadora**

$e^{-i(k_o z-\omega_o t)} = e^{-ik_o(z-vt)}$, una onda plana con frecuencia en ω_o vector de onda k_o , que se propaga a la velocidad de fase $v = \frac{\omega_o}{k_o} = \frac{c}{\eta(\omega_o)}$ (velocidad del frente de ondas)

El segundo término es la **Envolvente** $E_o\left(z - v_g t\right)$ que se propaga sin deformarse con $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_o$:

$$\omega = \frac{c}{\eta(\omega)} k \rightarrow \frac{\omega\,\eta(\omega)}{c} = k$$

$$\frac{d\omega}{dk}\frac{\eta(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{d\,\eta(\omega)}{d\omega}\frac{d\omega}{dk} = 1$$

$$\frac{d\omega}{dk}\left(\frac{\eta(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{d\,\eta(\omega)}{d\omega}\right) = 1$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\left(\eta(\omega) + \omega\frac{d\,\eta(\omega)}{d\omega}\right)}$$

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_o == \frac{c}{\left(\eta(\omega_o) + \omega_o \left.\frac{d\,\eta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_o}\right)}$$

2) Efectos de segundo orden (dispersión de la velocidad de grupo-GVD)

Vamos a propagar el campo, teniendo en cuenta dos ordenes del desarrollo de Taylor

$$k(\omega) = k_o + v_g^{-1}(\omega - \omega_o) + \frac{\Psi}{2}(\omega - \omega_o)^2$$

Vamos a suponer que en z=0, hay un pulso gaussiano

$$E(0,t) = E_o e^{-4\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{i\omega_o t}$$

Podemos definir en ancho usando difernetes criterios:

$\Delta t_{1/e} = \tau_o$

$\Delta t_{FWHM} = \tau_o\sqrt{\ln(2)}$

El contenido espectral del campo incidente se puede obtener a partir de la transformada de Fourier

$(de\ tablas\ \ldots .\mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\, e^{-i\omega t} e^{i\omega_o t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-(\omega-\omega_o)^2}{4a}},\ a = \frac{4}{\tau_o^2})$

$$E_o(\omega) = E_o \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-(\omega-\omega_o)^2}{4a}}$$

Notar que asi definida la transformada, la antitransformada queda definida como

$\mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{+i\omega t} d\omega$

Entonces, calculemos el campo luego de propagarse en z

$$E(z,t) = \int E_o(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega = \int E_o(\omega) e^{i\omega t - [k_o + v_g^{-1}(\omega-\omega_o) + \frac{\Psi}{2}(\omega-\omega_o)^2]z} d\omega$$

Sustituyendo el espectro del campo incidente

$$E(z,t) = E_o e^{i[-k_o z + \omega_o t]} \int \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-(\omega-\omega_o)^2}{4a}} e^{i[(\omega-\omega_o)(t - z v_g^{-1}) - z\frac{\Psi}{2}(\omega-\omega_o)^2]} d\omega$$

$$\omega' = \omega - \omega_o, \qquad d\omega' = d\omega$$

$$E(z,t) = E_o e^{i[-k_o z + \omega_o t]} \int \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-\omega'^2}{4a}} e^{i[\omega'(t - z v_g^{-1}) - z\frac{\Psi}{2}\omega'^2]} d\omega'$$

$$E(z,t) = E_o e^{i[-k_o z + \omega_o t]} \int \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-\omega'^2}{4a} - zi\frac{\Psi}{2}\omega'^2} e^{i\omega'(t - z v_g^{-1})} d\omega'$$

$$E(z,t) = E_o e^{i[-k_o z + \omega_o t]} \int \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-(\frac{1}{4a} + iz\frac{\Psi}{2})\omega'^2} e^{i\omega'(t - z v_g^{-1})} d\omega' = E_o e^{i[-k_o z + \omega_o t]} \int \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{4a}(1 + iz\Psi 2\mathrm{a})\omega'^2} e^{i\omega'(t - z v_g^{-1})} d\omega'$$

llamamos $\delta = 2az\,\Psi = 2\frac{4}{\tau_o^2} z\,\Psi = \frac{8\,ln\,(2)}{\Delta t_{FWHM}^2} z\,\Psi$

$$E(z,t) = E_o e^{i[-k_o z + \omega_o t]} \frac{2\pi}{\sqrt{1+i\delta}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{(1+i\delta)\,\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{4a}(1+i\delta)\omega'^2} e^{i\omega'(t - z v_g^{-1})} d\omega \right\}$$

Lo que está entre llaves es la antitransformada de $E_o(\omega)$ (o sea $E_o(t)$) cambiando $\frac{1}{4a}$ por $\frac{1}{4a}(1+i\delta)$ y $t \rightarrow t - z v_g^{-1}$

$$E(z,t) = E_o e^{i[-k_o z+\omega_o\, t]}\ \frac{2\pi}{\sqrt{(1+i\delta)}} e^{-a(t-zv_g^{-1})^2/(1+i\delta\,)} = E_o e^{i[-k_o z+\omega_o\, t]}\ \frac{2\pi}{\sqrt{(1+i\delta)}} e^{-\frac{a\left(t-zv_g^{-1}\right)^2(1-i\delta\,)}{1+\delta^2}}$$

con $a = \frac{4}{\tau_o^2}$

Podemos escribir separando la fase y la moduladora

$$E(z,t) = \frac{2\pi}{\sqrt{(1+i\delta)}} E_o e^{i\Phi(z,t)}\ e^{-\frac{a\left(t-zv_g^{-1}\right)^2}{1+\delta^2}}$$

$$\Phi(z,t) = -k_o z + \omega_o\, t + \frac{a\left(t - zv_g^{-1}\right)^2 \delta}{1+\delta^2}$$

Luego de recorrer una distancia L el pulso se ensancha

Ancho temporal

$$\tau(L) = \tau_o\sqrt{1+\delta^2} = \tau_o\sqrt{1+\left(\frac{8\ln(2)\,\Psi L}{\tau_o^2}\right)^2}$$

Frecuencia instantánea

$$\omega(z,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \omega_o + \frac{\left(t-\frac{z}{v_g}\right)4\alpha^2\Psi L}{1+(2\alpha\,\Psi\,L)^2}$$

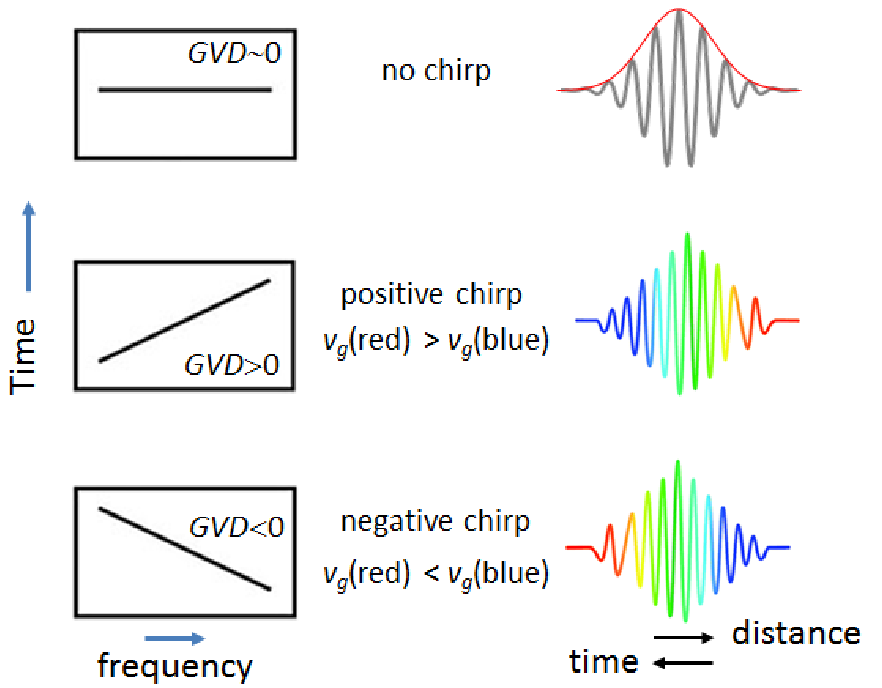
Chirp (dispersión de la velocidad de grupo)

$$GDD = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} = \Psi L$$

Las consecuencias principales de la propagación de pulsos en medios dispersivos son que el pulso se ensancha en el tiempo y que la frecuencia varia a través del pulso, efecto conocido como chirp

Es importante cuando:

- Propagación de pulsos ultracortos (< 50 fs)
- Generación de pulsos ultracortos (<ps) en laseres (el pulso pasa multiples veces por el medio activo)
- Propagacion de pulsos cortos (<ns) en fibras ópticas (se propagan km!)



https://web.iitd.ac.in/~kumarsunil/research.html

Usando datos experimentales

1) Analizar el comportamiento del pulso teniendo en cuenta
   a) velocidad de fase
   b) velocidad de grupo
   c) variación de fase a través del pulso (chirp)

   Considerar las siguientes situaciones para distintos anchos de pulso

   a) propagación en vacío
   b) índice de refracción dependiente de la frecuencia (buscar hojas de datos)
   c) región de dispersión anómala ($\frac{d\eta}{dk} < 0$) y dispersión normal ($\frac{d\eta}{dk} > 0$)
   d) resonancias dieléctricas

2) ¿En qué situaciones el paquete de ondas puede viajar a velocidades que superen la velocidad de la luz?