Mediciones. Errores. Propagación de errores. Estadística

Prof. Arturo S. Vallespi

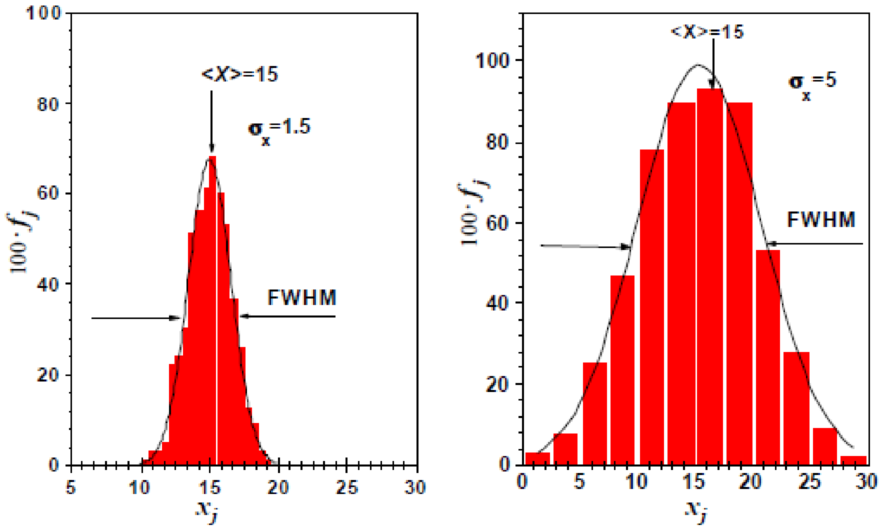
Incertidumbre estadística:

¿Qué ocurre si cada magnitud de interés en el experimento se mide más de una vez, por ejemplo 100 veces?

Histogramas y distribución de Gauss

¿Cómo presentar los resultados?

Histogramas



Conceptos a tener en cuenta en relación a un histograma:
Frecuencia
Probabilidad
Distribución

Valores centrales de las distribuciones

- ***La moda***
- ***La mediana***
- ***La media***

La media se calcula mediante la expresión

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^N x_i}{N}$$

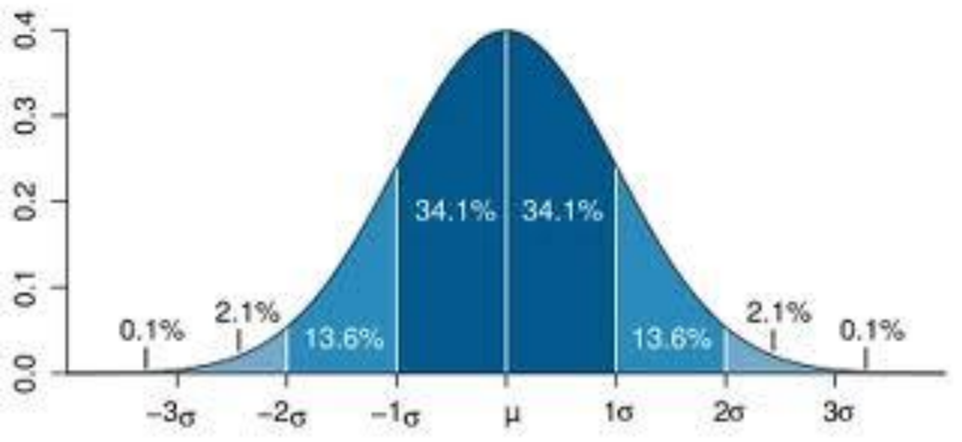
Para estimar la mediana cuando se tiene un número par de mediciones

$$1/2\,(x_{N/2} + x_{(N/2)+1})$$

Amplitud de las distribuciones

Desviación estándar de la distribución

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_1^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$



Distribución gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x \in \mathbb{R}$$

¿Qué ocurre si se toman muchas mediciones?

Desviación estándar de la media

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Aplicación a mediciones reales

Desviación estándar del universo

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_1^N (\bar{x} - x_i)^2}{N - 1}}$$

Desviación estándar de la media

$$S_m = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

S_x no depende de N si la muestra es grande sino de la calidad de las mediciones mientras que S_m sí depende de N y es menor cuanto más grande es N.

Expresión de resultados

$$\bar{x} \pm S_m$$

Probabilidad del 68 % de que la media del universo esté incluida en dicho intervalo

Medición e incertidumbre

Las medidas no son simples números exactos sino que consisten en intervalos, dentro de los cuales tenemos confianza de que se encuentra el valor esperado.

Debe explicarse qué criterio se utiliza al determinar el ancho del intervalo.

Presentación digital y redondeo.

- Instrumentos digitales
- Proceso de redondeo

Cifras significativas

L = (95,2 ± 0,5) mm, o bien L = (95 ± 1) mm

¿Tiene sentido L = (95,321 $\pm$ 1) mm?

Cambio de unidades

$$9{,}5 \cdot 10^{1}\ mm\ =\ 9{,}5 \cdot 10^{4} \mu m$$

Incertidumbre absoluta y relativa

$$X = \bar{X} \pm \Delta X$$

•Un valor central que se puede usar para cálculos posteriores
•Un valor que se conoce como ***incertidumbre*** de la medida: permite juzgar ***la calidad*** del proceso de medición y puede usarse en cálculos separados de incertidumbres

Incertidumbre absoluta:

$$\pm \Delta X$$

Incertidumbre relativa:

$$\varepsilon_x = \frac{incertidumbre\ absoluta}{valor\ medido} = \frac{\Delta x}{x}$$

Cuando a esta última se la expresa en forma de porcentaje hablamos de **precisión** de la medida.

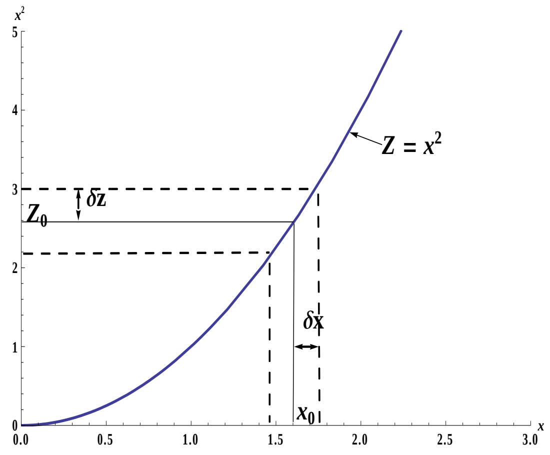
Tipos de errores

- Errores sistemáticos
- Errores accidentales o aleatorios
- Errores espurios

Propagación de errores

Incertidumbre en funciones de una sola variable

$$z = f(x)$$



$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x)^2 = x_0^2 \pm 2x_0\delta x + (\delta x)^2$$

$$\delta z = 2x_0\delta x$$

$$\frac{\delta z}{z_0} = \frac{2x_0\delta x}{x_0^2} = 2\,\frac{\delta x}{x_0}$$

Algunos casos importantes

Potencias

$$F(x) = x^n$$

$$\delta z = n x^{n-1} \delta x$$

$$\frac{\delta z}{z} = n \frac{\delta x}{x}$$

Funciones logarítmica y exponencial

$$z = \ln(x) \qquad \delta z = \frac{1}{x} \delta x$$

$$z = e^x \qquad \delta z = e^x \delta x$$

Incertidumbre en funciones de dos o más variables

Suma de dos o más variables $z = x + y$

$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y)$$

$$\delta z = \delta x + \delta y \qquad \frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y}$$

Diferencia de dos variables $z = x - y$

$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y)$$

$$\delta z = \delta x + \delta y \qquad \frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x + \delta y}{x - y}$$

Producto de dos o más variables (y también cocientes)

$$z = xy \qquad\qquad \delta z = y\delta x + x\delta y$$

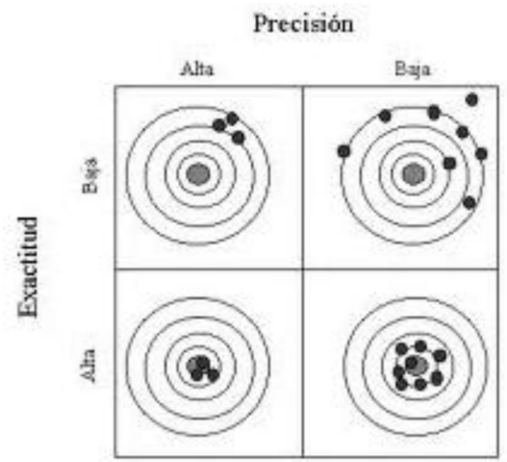
$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

$$z = x^a y^b$$

$$\frac{\delta z}{z} = a\frac{\delta x}{x} + b\frac{\delta y}{y}$$

Acerca de la exactitud y la precisión

- La **precisión** de un instrumento o método de medición se relaciona a la ***sensibilidad*** o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con dicho instrumento o método.
- La **exactitud** se relaciona con la ***calidad*** de la calibración del instrumento que se usa para medir y se habla también de sesgo o tendencia.



Desviación estándar de valores calculados:

Suma de dos variables $z = x + y$

$$S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

Diferencia de dos variables $z = x - y$

$$S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

Producto de dos variables $z = xy$

$$S_z = \sqrt{y^2 S_x^2 + x^2 S_y^2} \qquad \frac{S_z}{z} = \sqrt{\frac{S_x^2}{x^2} + \frac{S_y^2}{y^2}}$$

Variables elevadas a potencias

$$z = x^a$$

$$S_z = \sqrt{a^2 x^{2(a-1)} S_x^2}$$

$$\frac{S_z}{z} = \sqrt{a^2 \frac{S_x^2}{x^2}} = a \frac{S_x}{x}$$

El caso general de potencias y productos

$$z = x^a y^b$$

$$\frac{S_z}{z} = \sqrt{\left(\frac{aS_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{bS_y}{y}\right)^2}$$

Consistencia de las mediciones

Discrepancia, precisión y superposición de mediciones:

$$X_1 = \bar{X}_1 \pm \Delta X_1$$

$$X_2 = \bar{X}_2 \pm \Delta X_2$$

$$\Delta X^2 = \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq \Delta X \qquad 68\%$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq 2 \cdot \Delta X \qquad 96\%$$