Filtros

2.1. RC pasabajos

Considere el circuito de la figura 2.1.

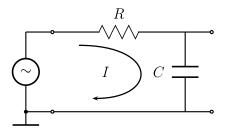


Figura 2.1: Una fuente de onda armónica de amplitud V_i y frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo RC.

La tensión de salida, V_0 , coincide con la tensión sobre el capacitor, V_C , y se expresa en notación compleja de la siguiente manera

$$V_0 = V_C = I Z_C = \frac{V_i}{Z_T} Z_C = \frac{V_i}{R - \frac{j}{\omega C}} \frac{-j}{\omega C} = \frac{V_i \frac{-j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$
 (2.1)

siendo I la corriente que circula por el capacitor (que en este caso coincide con la corriente de la única malla), Z_C la impedancia del capacitor, Z_T la impedancia total que el cuadrupolo presenta a la fuente de tensión armónica (de frecuencia ω y amplitud V_i), y j la unidad imaginaria ($j^2 = -1$).

Multiplicando numerador y denominador por $j\omega C$ resulta

$$V_0 = \frac{V_i}{1 + j\omega RC} = \frac{V_i}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{siendo} \quad \boxed{\omega_0 = 1/RC}$$
 (2.2)

La función transferencia, T, resulta entonces

$$T \equiv \left| \frac{V_0}{V_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$
 (2.3)

Para calcular la diferencia de fase entre V_C y V_i conviene racionalizar la última expresión de V_0

$$V_C = \frac{V_i (1 - j\omega/\omega_0)}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$
 (2.4)

De donde resulta

$$\phi = \arctan \frac{\Im\{V_C/V_i\}}{\Re\{V_C/V_i\}} = -\arctan \omega/\omega_0$$
(2.5)

Los gráficos de la función transferencia y el defasaje en función de ω/ω_0 se ilustran en la figura 2.2.

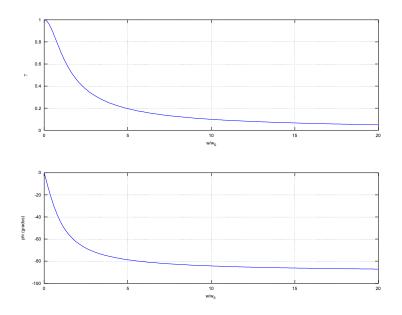


Figura 2.2: Funciones transferencia y defasaje correspondientes a un filtro RC pasabajos. Para $\omega/\omega_0 \to 0$, resulta: $T \to 1$ y $\phi \to 0$; mientras que para $\omega/\omega_0 \to \infty$, se obtiene: $T \to 0$ y $\phi \to -90^{\circ}$.

2.1.1. Atenuación, defasaje y diagrama de Bode

Se define la atenuación, A, como

$$A \equiv 20 \log_{10} T \quad [dB] \tag{2.6}$$

2.1. RC PASABAJOS

y se expresa en decibeles (dB). Por ejemplo, una atenuación $A = -20 \,\mathrm{dB}$ se corresponde con una tensión de salida que es 10 veces inferior a la de entrada, esto es, con T = 0.1.

Para el caso del filtro RC pasabajos resulta

$$A(\omega) = -10 \log_{10} \left[1 + (\omega/\omega_0)^2 \right] dB$$
 (2.7)

y pueden verificarse el siguiente límite y asíntota

$$\lim_{\omega \to 0} A(\omega) = 0 \text{ dB} \tag{2.8}$$

$$A(\omega) \sim -20 \log_{10}(\omega/\omega_0) \, dB \quad \text{para} \quad \omega \gg \omega_0$$
 (2.9)

La asíntota indica que para frecuencias $\omega \gg \omega_0$, la atenuación decrece a una razón constante de 20 dB por década¹. Esta pendiente es una medida de la calidad del circuito para actuar como filtro. Cuanto mayor sea el módulo de dicha pendiente, mayor será la capacidad del filtro para discriminar frecuencias.

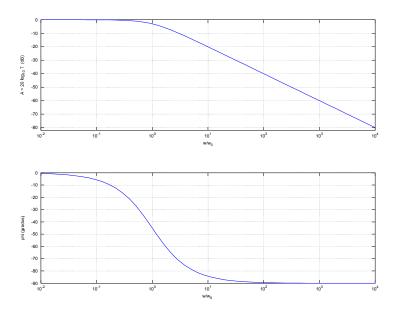


Figura 2.3: Diagrama de Bode para un filtro RC pasabajos. Notar que para $\omega \gg \omega_0$ la atenuación decrece a una razón constante de 20 dB por década.

En el caso del filtro que nos ocupa, a la región $\omega \ll \omega_0$ de la denomina banda pasante (dado que $A \approx 0$, es decir, $T \approx 1$), y a la región $\omega \gg \omega_0$ se la denomina banda rechazada.

¹Se denomina década a cada intervalo de amplitud unidad en escala logarítmica, esto es, a cada intervalo en el que la magnitud de interés se incrementa en un factor 10 cuando se la mide en una escala lineal

Obsérvese además que en la banda pasante es $\phi \approx 0$ por lo que resulta que la señal de salida es prácticamente igual a la de entrada (el filtro no atenúa ni defasa).

La frecuencia ω_0 se denomina **frecuencia de corte**, se denota también ω_c , y para ella resulta

$$A(\omega_c) = -3.01 \,\text{dB}$$
 $\phi(\omega_c) = -45^{\circ}$ (2.10)

y es además la frecuencia para la cual se cortan las asíntotas horizontal y oblícua de la curva A en función de $\log_{10}(\omega/\omega_0)$ (gráfico superior de la figura 2.3). De ello proviene su denominación.

Observe además, que para la frecuencia de corte resulta

$$T(\omega_c) = 1/\sqrt{2} \approx 0.7 \tag{2.11}$$

de modo que a dicha frecuencia, la amplitud de la tensión de salida del filtro decae al 70% de la de entrada.

2.2. RC pasaltos

Considere el circuito de la figura 2.4

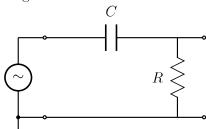


Figura 2.4: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo RC que actúa como pasaaltos.

Verifique que la función transferencia, T, el defasaje ϕ y la atenuación A valen, respectivamente

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \qquad \phi = \arctan x^{-1} \qquad A = -10 \log_{10}(1+x^{-2})$$
 (2.12)

siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega RC$. Note que la frecuencia de corte coincide con la del caso anterior.

El diagrama de Bode se ilustra en la figura 2.5.

2.3. RL PASABAJOS

La banda pasante es ahora aquella tal que $\omega \gg \omega_0$, y en ella vale $T \approx 1$, $\phi \approx 0$ y $A \approx 0$. En la banda rechazada se tiene $T \ll 1$, $\phi \approx 90^{\circ}$, $A \ll 1$, y corresponde a $\omega \ll \omega_0$. Es el caso opuesto al del filtro anterior.

En la frecuencia de corte se tiene, nuevamente,

$$A(\omega_c) = -3.01 \,\text{dB}$$
 $\phi(\omega_c) = -45^{\circ}$ (2.13)

Obsérvese además que en la banda rechazada la atenuación varía nuevamente a una razón de 20 dB por década, por lo que este filtro es de la misma calidad que el anterior.

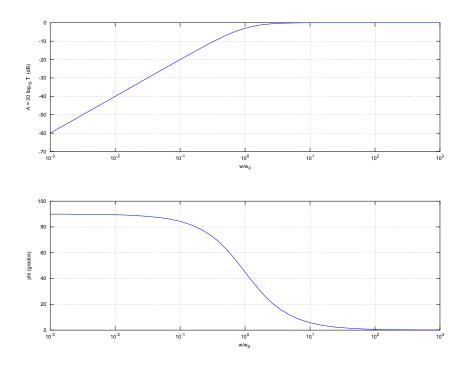


Figura 2.5: Diagrama de Bode para un filtro RC pasaaltos. Notar que para $\omega \ll \omega_0$ la atenuación crece a una razón constante de 20 dB por década.

2.3. RL pasabajos

Considere el circuito de la figura 2.6

Verifique que la función transferencia, T, el defasaje ϕ y la atenuación A son, respectivamente

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
 $\phi = -\arctan x$ $A = -10 \log_{10}(1+x^2) dB$ (2.14)

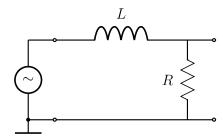


Figura 2.6: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo LR pasabajos.

siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega L/R$. De las ecuaciones expuestas se deduce que este circuito se comporta igual que el RC pasabajos, con la única salvedad de que ahora la frecuencia de corte es $\omega_0 = R/L$

El diagrama de Bode coincide con el de la figura 2.3, y valen todas las consideraciones expuestas en la sección 2.1.

RL pasaaltos 2.4.

Considere el circuito de la figura 2.7

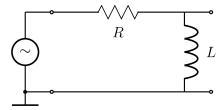


Figura 2.7: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo LR pasaaltos.

Verifique que la función transferencia, T, el defasaje ϕ , y la atenuación valen, respectiva-

mente
$$T = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \qquad \phi = \arctan x^{-1} \qquad A = -10 \, \log_{10}(1+x^{-2})$$
 siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega \, L/R$, que coincide con el caso RL pasabajos. (2.15)

Se deduce que el circuito que nos ocupa se comporta igual que el RC pasaaltos, con la única salvedad de que la frecuencia de corte es, en este caso, $|\omega_0 = R/L|$

El diagrama de Bode coincide con el de la figura 2.5, y valen todas las consideraciones expuestas en la sección 2.2.

2.5. Filtros de orden 2

2.5.1. Pasabajos LC

Considere el circuito de la figura 2.8

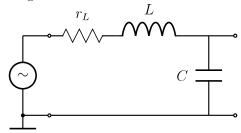


Figura 2.8: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo LC en el que se considera la resistencia interna, r_L , de la inductancia.

Verifique que la función transferencia, T, el defasaje ϕ y la atenuación A son, respectivamente,

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2 p^2}} \quad \phi = -\arctan \frac{x p}{1-x^2} \quad A = -10 \log_{10} \left[(1-x^2)^2 + x^2 p^2 \right] dB$$
(2.16)

siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega \sqrt{LC}$, y $p = r_l \sqrt{C/L}$. La frecuencia de corte resulta en este caso

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.17}$$

El gráfico de la atenuación se ilustra en la figura 2.9.

2.5.2. Pasaaltos LC

Considere el circuito de la figura 2.10. Calcule la función transferencia, T, el defasaje ϕ y la atenuación A, y demuestre que es un pasabajos.

2.5.3. Pasabanda y eliminabanda LC

Analice los circuitos de las figuras 2.11 y 2.12 y compruebe que se comportan como pasabanda y eliminabanda, respectivamente.

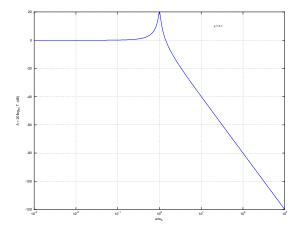


Figura 2.9: Diagrama de la atenuación para un filtro LC pasabajos en el que se considera la resistencia interna de la bobina (ecuación 2.16. Se ilustra el caso p=0,1). Nótese que para $\omega\gg\omega_0$ la atenuación decrece a una razón de 40 dB por década.

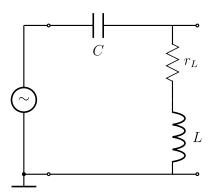


Figura 2.10: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo LC en el que se considera la resistencia interna, r_L , de la inductancia.

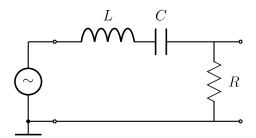


Figura 2.11: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo RLC que actúa como pasabanda.

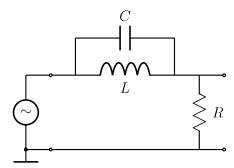


Figura 2.12: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un cuadrupolo RLC que actúa como eliminabanda.