

PARÁMETROS CARACTERÍSTICO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

MARIO ESTANISLAO CESAR ARIET
ALEJANDRO SCHULMAN

*Laboratorio 3, Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Julio del 2006*

El objetivo principal del presente trabajo consiste en estudiar el comportamiento de una línea de transmisión formado por un cable coaxial. Para eso hemos realizado una serie de experimentos con pulsos de corta y larga duración respecto del tiempo de delay. Además, considerando el cable como una cavidad de ondas electromagnéticas, estudiamos sus frecuencias de resonancias.

1. INTRODUCCIÓN

Antes de empezar a estudiar al cable coaxial es necesario cierto conocimiento previo acerca del mismo.

El cable coaxial es básicamente una línea de transmisión con simetría cilíndrica, compuesto por un conductor central de diámetro r_i , otro conductor exterior de diámetro r_e y entre los conductores se encuentra un medio dieléctrico. Considerando la simetría del cable y a los conductores ideales entonces es sencillo calcular los campos tanto eléctrico como magnético dentro del dieléctrico (donde no serán nulos ya que el dieléctrico está aislado del exterior por los conductores), el campo eléctrico tiene que ser normal a las superficies del conductor en consecuencia las líneas de campo tienen que ser radiales y al contrario, las líneas de campo magnético tienen que ser tangenciales a las paredes de conductor, lo que significa que serán circulares.

Entonces usando la ley de Ampere y el teorema de Gauss, la capacitancia y la auto-inductancia de la línea de transmisión por unidad de longitud son sencillas de calcular:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \quad (1)$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \quad (2)$$

donde ϵ es la constante del dieléctrico y μ es la permeabilidad del mismo (que en este caso la consideramos igual a la del vacío). Además como

la densidad de energía eléctrica y magnética son iguales y estas valen:

$$E_E = \frac{1}{2} CV^2 \quad (3)$$

$$E_M = \frac{1}{2} LI^2 \quad (4)$$

Donde V e I representan el voltaje y la corriente respectivamente; se ven en las ecuaciones que el cociente V/I es una constante que depende de ϵ , μ y la geometría del medio. Esta constante es llamada la impedancia característica, Z_0 . Combinando (3) y (4) obtenemos:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \quad (5)$$

Por otro lado, podemos considerar que el conductor está compuesto por una serie de celdas elementales, representando cada cual un segmento infinitesimal de la línea de transmisión. Cada segmento esta compuesto por una impedancia en serie y un capacitor en paralelo. Llamemos L a la inductancia por longitud y C a la capacitancia por unidad de longitud del cable. Despreciemos las perdidas debidas a la resistividad de los conductores y a la conductividad del dieléctrico del cable de manera que la línea de transmisión se puede considerar una estructura idea. En este caso, el modelo depende sólo de los parámetros L y C , de los cuales obtenemos un par de ecuaciones diferenciales parciales, una de ellas para la tensión y otra para la corriente, a través de la línea, ambas en función de la posición o distancia x y del tiempo t .

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = -L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) \quad (7)$$

y combinándolas obtenemos la ecuación de onda para un pulso que se propaga a través del cable

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I \quad (9)$$

De (8) y (9) podemos concluir que un pulso dentro del conductor se propagara con una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (10)$$

Además, si colocamos al final de la línea una impedancia puramente resistiva R podemos encontrar ondas reflejadas, cuyo coeficiente de reflexión Γ esta dado por:

$$\Gamma = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \quad (11)$$

1.1. PULSOS DE LARGA DURACIÓN

Luego estudiaremos el sistema en el límite de baja frecuencias, extendiendo la duración del periodo de la señal de tal modo que el pulso reflejado “vuelva” antes que termine el pulso original. Estos pulsos se suman creando una serie que converge a la carga de un capacitor, ya que en el limite una onda constante todos los puntos del cable estarán con el mismo potencial. Entonces usando una resistencia R al principio de la línea de transmisión y un pulso inicial de amplitud V_0 el pulso resultante en el cable tendrá una amplitud igual a

$$V_n = V_0 \frac{Z_0}{R + Z_0} \quad (12)$$

Si el extremo del cable esta abierto (el coeficiente de reflexión será igual a 1) el voltaje al inicio del cable luego de n reflexiones será:

$$V_n = V_0 \frac{Z_0}{R + Z_0} (1 + \Gamma + \Gamma^2 + \dots + \Gamma^n) \quad (13)$$

donde Γ representa el coeficiente de reflexión al principio del cable, en el límite cuando n tiende a infinito \square la serie converge a:

$$V_\infty = V_0 \frac{2Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{1 - \Gamma} \quad (14)$$

Usando (11) es fácil ver que el voltaje medido al principio del cable tiende a V_0 para grandes n , el cociente V_{n+1}/V_n puede ser escrito como:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1 - \Gamma^{n+1}}{1 - \Gamma^n} \quad (15)$$

donde $t_{n+1} = t_n + \frac{2l}{v}$.

De la teoría de circuitos sabemos que un pulso de amplitud V_0 en un cable de capacitancia C , conectado a un generador de funciones mediante una resistencia R el voltaje $V_C(t)$ estará dado por:

$$V_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (16)$$

Donde τ \square es el tiempo característico del circuito RC . Entonces desde el punto de vista de la teoría de circuitos la ecuación (15) se puede reescribir como:

$$\frac{V(t_{n+1})}{V(t_n)} = \frac{1 - e^{-(n+1)\frac{2l}{v\tau}}}{1 - e^{-n\frac{2l}{v\tau}}} \quad (17)$$

Comparando (15) y (17) obtenemos:

$$e^{-\frac{2l}{v\tau}} = \Gamma$$

$$\tau = -\frac{2l}{v \ln(\Gamma)} \quad (18)$$

1.2. RESONANCIAS EN EL CABLE COAXIAL

Para completar el estudio de la línea de transmisión introducimos una señal sinusoidal, en lugar de un pulso. En este caso la teoría de ondas electromagnéticas nos indica que aparecerán ondas estacionarias en el cable y que encontraremos resonancias para un conjunto discreto de frecuencias (que dependerán de las condiciones de contorno). Si el cable termina con ambos extremos abiertos ($R = 1$) las frecuencias resonantes serán tales que la longitud del cable es un múltiplo entero de $\lambda/2$.

2. DESARROLLO

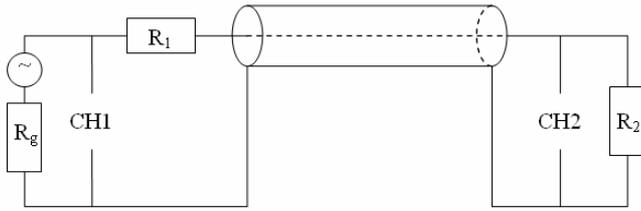


Fig. 1: Esquema del circuito empleado en la experiencia.

Para la experiencia utilizamos un cable coaxial *RG-62AU* de $l = 93.3 \pm 0.1m$. La figura 1 muestra el dispositivo armado para la experiencia. Alimentamos el circuito con un generador de señal *HP-33120A* de una impedancia interna de $R_g = 50\Omega$. Las resistencias variables R_1 y R_2 se ajustaron según las necesidades de cada medición. Tomamos datos a partir de los dos canales de un osciloscopio *Tectronix-210* como indica el esquema.

2.1. IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA

Con el generador de señal enviamos a través del cable una onda cuadrada de frecuencia 500kHz y un ancho del 20% del periodo del pulso. Cuando la señal llega al final del cable es reflejada según (11) hacia el extremo opuesto. Si la resistencia R_2 es igual al valor de la impedancia característica Z_0 del cable el coeficiente de reflexión es nulo y no habrá onda reflejada. Buscando dicha situación obtuvimos como resultado

$$Z_0 = 92.0 \pm 0.5\Omega$$

Valor que coincide con los 93Ω de la ficha técnica del cable. El error de la medición fue tomado como el error del multímetro con el cual medimos la resistencia.

2.2. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN

Consideremos que del generador de señal sale una onda cuadrada (de iguales características que en las medición anterior) con una amplitud V_0 . La resistencia R_1 fue cortocircuitada. El cable está acoplado a la fuente con coeficiente de reflexión Γ_1 mirado desde la línea. Hacia el cable pasa una fracción de la tensión V_0 dada por (12) tomando $R = 50\Omega$. Sobre el extremo contrario tendremos un coeficiente de reflexión Γ_2 dependiente de la magnitud de la resistencia R_2 . La amplitud del pulso que vuelve a la fuente (valor tomado con CH1) está dada por:

$$V = V_0 \frac{R}{R + Z_0} \Gamma_2 (1 - \Gamma_1) \tag{19}$$

Variando la resistencia R_2 fuimos midiendo la tensión del pulso reflejado en el CH1. Sabemos de (19) que esta tensión es proporcional al valor de Γ_2 con lo cual tenemos que:

$$V(R_2) = K \Gamma_2(R_2) = K \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0} \tag{20}$$

La figura 2 muestra la tensión medida sobre el CH1 para distintos valores de R_2 . La curva es un ajuste de la ecuación (20). A partir de este ajuste obtenemos otra medición de la impedancia característica cuyo resultado es

$$Z_0 = 94 \pm 2\Omega$$

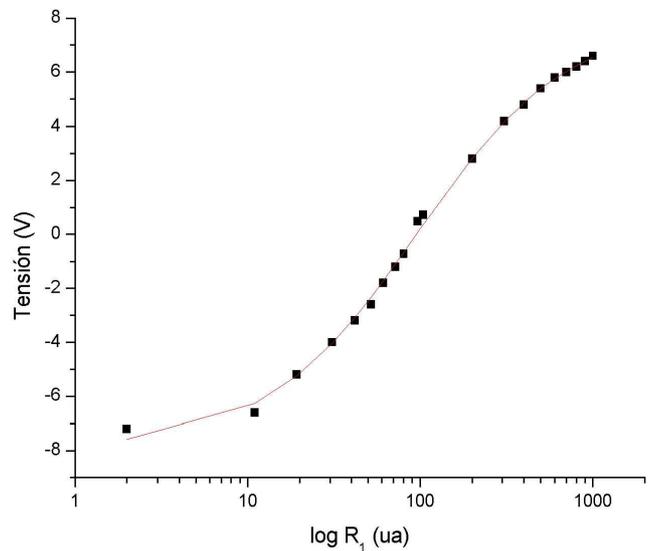


Fig. 2: Estudio del comportamiento del coeficiente de reflexión en el final del cable al variar la resistencia R_2

2.3. PULSOS DE MUY CORTA DURACION

Para determinar la velocidad de propagación de la onda dejamos el extremo del cable abierto, es decir, R_2 infinita. En esta situación el coeficiente de reflexión es igual a 1. Enviamos con el generador de señal una onda cuadrada de periodo $2\mu s$ y un ancho del 20%. Cada pulso de la señal llega al final del cable y se refleja hacia el comienzo del mismo tardando en recorrer $2l$ un tiempo $730 \pm 10ns$.

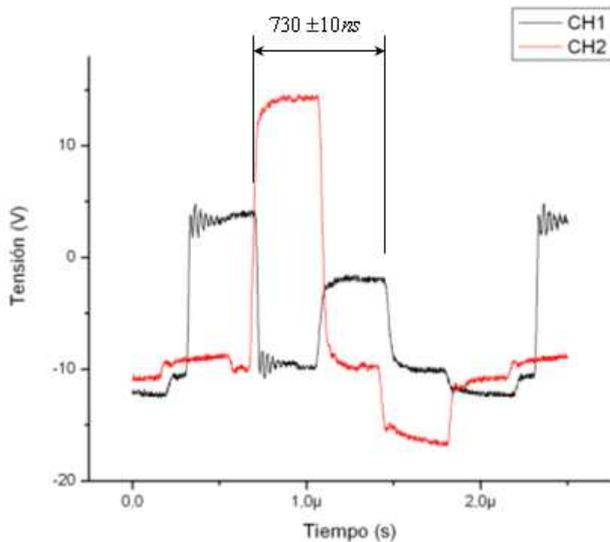


Fig. 3: Medición de la señal y sus posteriores reflexiones en el origen y final del cable.

De estos datos obtenemos una velocidad de propagación de:

$$v = \frac{2l}{t} = 0.85 \pm 0.01c$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Según catalogo la velocidad de propagación en el cable es de $0.84-0.88c$.

Con los datos de la impedancia característica del cable coaxial y la velocidad de propagación determinamos otros parámetros del mismo como capacitancia por metro e impedancia por metro. En la siguiente tabla se listan todos los resultados

Parámetro	Medido	Esperado
Impedancia caract.	$92.0 \pm 0.5\Omega$ $94 \pm 2\Omega$	93Ω
Velocidad de prop.	$0.85 \pm 0.01c$	$0.84 - 0.88c$
Capacitancia/metro	$42.5 \pm 0.8 pFm^{-1}$	$44.3 pFm^{-1}$
Impedancia/metro	$360 \pm 7 nHm^{-1}$	-

Tabla 1: Parámetros medidos y valores recopilados de catalogo del cable coaxial GR-62AU.

En la figura 3 Observamos un comportamiento mucho más rico. Es evidente que hay más de una reflexión. Esto se debe a una diferencia de impedancia en el acoplamiento del generador (de 50Ω) y el cable (de 93Ω), en este caso teníamos la resistencia R_l en cortocircuito. El desacoplamiento provoca, al igual que en el final del cable, un coeficiente de reflexión distinto de cero. Además como la impedancia del cable es mayor que la impedancia del generador el coeficiente es negativo para el pulso que va desde el cable hacia el generador, con lo cual parte de la señal se refleja con signo opuesto. Este efecto

corresponde al pulso invertido en el CH2. A medida que el pulso recorre el cable pierde amplitud tanto por la atenuación del cable como la distintas reflexiones al comienzo del cable (por que el coeficiente es menor que 1). En el final de la línea (CH2) el primer pulso tiene una amplitud mucho mayor que la amplitud del la señal. Esto se debe a que en el final del cable se suma la intensidad de la onda que va y su reflexión que vuelve.

2.4. PULSOS DE LARGA DURACIÓN

En esta medición colocamos una resistencia R_l elevada en la entrada respecto a la impedancia característica de la línea. Con esto nos aseguramos que el coeficiente de reflexión a la entrada del cable es cercano a 1. El otro extremo se dejó abierto (R_2 infinita), entonces, con una reflexión total. Según vimos en la introducción los pulsos de una duración mucho mayor al tiempo de delay del cable produce que la onda se valla superponiendo consigo misma hasta alcanzar la tensión de entrada. Que el ancho temporal del pulso sea varios órdenes mayores que el tiempo de delay significa que la variación de la señal es suficientemente lenta como para que se trasmita a lo largo de todo el cable, convirtiéndolo en un equipotencial. Dado la geometría de la línea podemos pensarla como un capacitor.

Las siguientes figuras muestra la evolución temporal de la tensión en el final del cable para una resistencia $R_l = 1.1k\Omega$ y $R_l = 2k\Omega$. El voltaje pico a pico de la señal es $20.0 \pm 0.5V$. La línea color rojo es el ajuste de la carga de un capacitor ordinario.

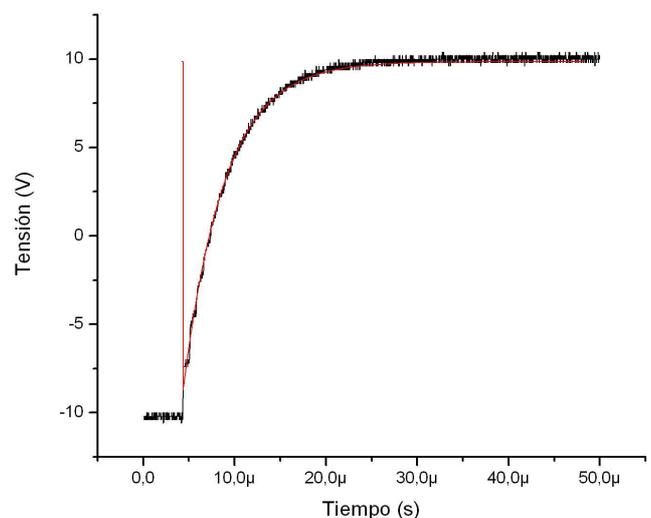


Fig. 4: Tensión medida a través del tiempo en el final del cable coaxial para una $R_l = 1.1k\Omega$ para una señal cuadrada periodo mucho mayor que el tiempo de viaje de la señal.

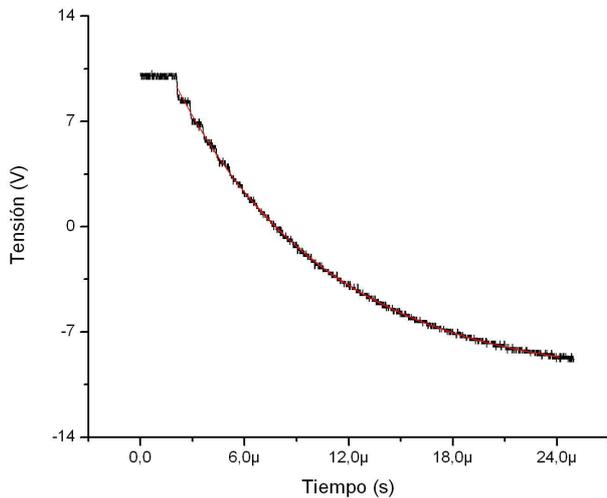


Fig. 5: Tensión medida a través del tiempo en el final del cable coaxial para una $R_1 = 2k\Omega$ para una señal cuadrada periodo mucho mayor que el tiempo de viaje de la señal.

Del ajuste de las curvas de teoría de un circuito RC para la resistencia $R_1 = 1.1k\Omega$ obtuvimos un tiempo característico y una capacitancia de

$$\tau = 4.53 \pm 0.07 \mu s, C = 4.1 \pm 0.1 nF$$

y para el caso $R_1 = 2k\Omega$

$$\tau = 8.86 \pm 0.03 \mu s, C = 4.43 \pm 0.04 nF$$

Considerando que el cable es homogéneo obtenemos que la capacitancia por metro toma los valores $44 \pm 1 pFm^{-1}$ y $42.5 \pm 0.8 pFm^{-1}$, resultados que concuerdan con los valores de la tabla 1.

2.5. ONDAS ESTACIONARIAS EN EL CABLE COAXIAL

Como ya mencionamos podemos encontrar ondas estacionarias en la línea de transmisión y según las condiciones de contorno (valores de R_1 y R_2) habrá un conjunto discreto de frecuencias resonantes. Las condiciones más sencillas son extremos abiertos o extremos cerrados. En un extremo cerrado no hay diferencia de potencial entre los conductores del cable por ser un cortocircuito. Si cerramos el final del cable es inútil la medición del CH2. El comienzo del cable tampoco se puede cortocircuitar porque siempre está la acción de la impedancia propia del generador de señal. Por estas razones descartamos las condiciones de extremos cerrados o mixtas. Dejar el final de la línea abierta es posible (ya lo hemos usado en mediciones anteriores). El comienzo de la misma no se puede dejar abierto dado que estaríamos quitando la acción de generador sobre el cable. Sin embargo colocando

una resistencia mucho mayor que la impedancia característica del cable logramos un extremo que es prácticamente cerrado y que aún así se trasmite al cable una pequeña proporción de la señal del generador.

La figura 6 muestra las amplitudes (medidas desde el CH2) de las correspondientes frecuencias resonantes para las siguientes condiciones de contorno: $R_1 = 2k\Omega$ y $R_2 = \infty$ (extremo abierto). Observamos que, como es de esperar, la amplitud de la señal decae a medida que pasamos a modos más altos. También vimos (no se muestra en el gráfico) que en cada frecuencia de resonancia la tensión de excitación y la tensión sobre el cable estaban en fase o en contrafase, alternado de modo en modo. Entre cada dos modos resonantes consecutivos no hay una diferencia de frecuencias igual a la fundamental sino que estos están separados por 1.022 ± 0.005 veces la frecuencia fundamental. Esto se debe fundamentalmente a que la condición de contorno no son perfectamente abiertos (particularmente en el inicio del cable).

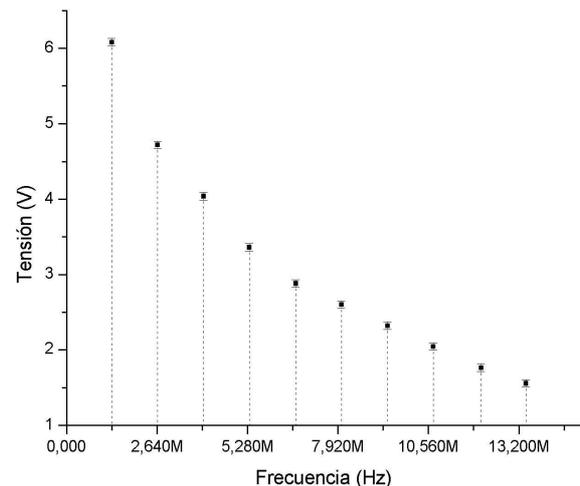


Fig. 6: Espectro de frecuencias de resonancia para el cable coaxial con extremos abiertos.

Finalmente la figura 7 muestra como varía la amplitud de respuesta en el cable en función de la frecuencia de la señal desde los 100Hz hasta alcanzar los 2.7Mhz (un poco más de la frecuencia del segundo modo de resonancia). Como es de esperar para frecuencias bajas el cable se comporta como un capacitor, con lo cual la tensión a bajas frecuencias es igual a la tensión de alimentación (20.6V). Para ver claramente esta situación la figura 8 es equivalente a la figura 7 con la salvedad de que es un gráfico semilogarítmico.

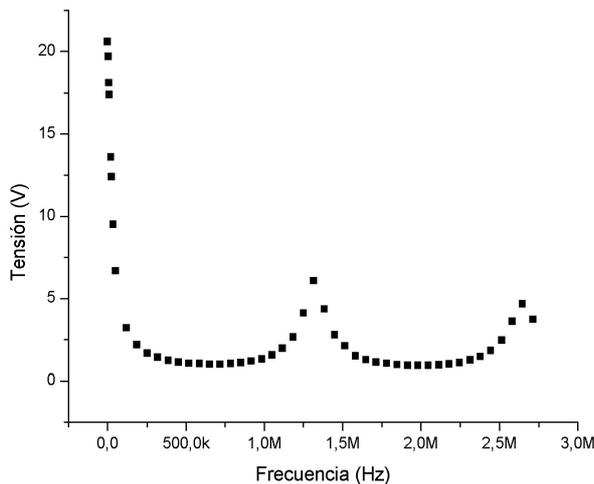


Fig. 7: Tensión sobre el final del cable al variar la frecuencia de la señal del generador de funciones.

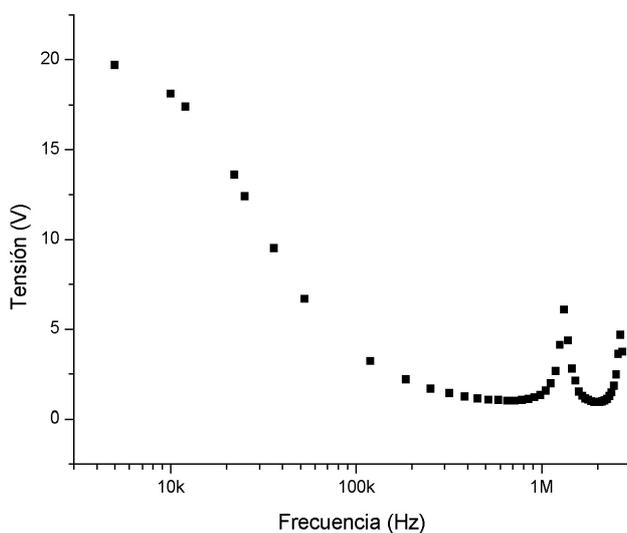


Fig. 8: Gráfico semilogarítmico de la figura 7 para observar como la tensión sobre el final del cable tiende al valor de la tensión del generador de señal para bajas frecuencias.

3. CONCLUSIONES

Todos los valores medidos de los parámetros característicos del cable *RG-62AU* concordaron perfectamente con los datos extraídos desde catálogo.

El trabajo se basó en tres partes. Realizamos un estudio del cable para pulsos de duración menores que el tiempo de delay. Luego, realizamos mediciones para pulsos más largos que el tiempo de delay. Y por último, observamos cualitativamente el comportamiento del cable como una cavidad resonante.

La impedancia del cable fue medida de dos maneras. En primer lugar la determinamos eliminando la reflexión en el final del cable. La desventaja de este método es no poder asociar una incertidumbre a la medición (solo consideramos el error de la determinación de la resistencia con el

multímetro utilizado). En segundo lugar estimamos la impedancia de la línea a partir de un ajuste de los coeficientes de reflexión para varios valores de resistencia.

Con el tiempo de delay de la señal que tarda de viajar hacia el extremo del cable y volver medimos la velocidad de propagación.

Luego con la impedancia del cable y la velocidad de propagación estimamos indirectamente los valores de la capacidad por metro e impedancia por metro.

Para pulsos de duración mucho mayores que el tiempo de delay vimos que pensar al cable como un capacitor es congruente con los resultados obtenidos. Además, con esta medición pudimos estimar de una manera alternativa la capacitancia por metro de la línea.

Por último observamos el comportamiento del cable como una cavidad resonante de ondas electromagnéticas. En este caso medimos la tensión sobre el cable en función de la frecuencia de alimentación. Nuevamente para bajas frecuencias encontramos que el cable tiende a comportarse como un capacitor.

4. REFERENCIAS

- [1] J.M. Serra, "A wave lab inside a coaxial cable", Faculdade de Ciências Universidade de Lisboa (10/6/2004).
- [2] L. Cieri, M. Fleitas, "Parametros en lineas de transmision", Facultad de ciencias exactas y naturales, UBA (07/2002).
- [3] T.E. Owusu, "Measuring coaxial cable impedance using oscilloscope to analyze waveform", University of North Carolina At Charlotte (17/7/2000).
- [4] J.L. Drewniak y R.E. DuBroff, "Pulses on Transmission Lines", University of Missouri-Rolla.
- [5] David Halliday y Robert Resnick, "Física" (CECSA, México, 1970).
- [6] Jacob Millman y Herbert Taub, "Pulse and Digital Circuits" (McGraw-Hill, EE.UU., 1956).
- [7] Frank S. Crawford, "Ondas", 1ª edición (Reverte, Barcelona, 1971).
- [8] John David Jackson, "Classical electrodynamics" 2ª edición (New York, NY: Wiley, 1975).