

# Resonancia

Prof. Cesar Moreno

## 3.1. Circuito RLC serie

Dado un circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  (Fig 3.1), la ley de Ohm permite plantear:

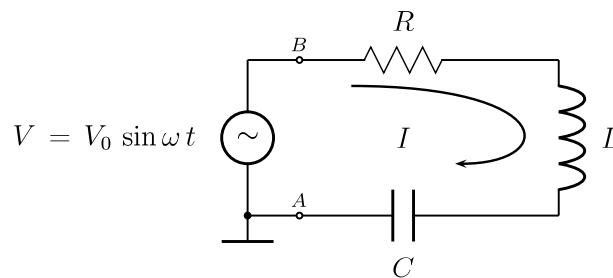


Figura 3.1: *Circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica de amplitud  $V_0$  y frecuencia angular  $\omega$ .*

$$V = I Z_{AB} = I (R + Z_L + Z_C) = I \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \quad (3.1)$$

donde  $V$  es la tensión aplicada por la fuente,  $I$  la corriente que circula por la malla,  $Z_{AB}$  la impedancia, vista desde la fuente, entre los puntos  $A$  y  $B$ ,  $Z_L$  y  $Z_C$  las impedancias de la bobina y el capacitor, respectivamente,  $\omega$  la frecuencia angular de la tensión armónica que entrega la fuente, y  $j$  la unidad imaginaria ( $j^2 = -1$ ).

Luego

$$|I| = \frac{|V|}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}} \quad (3.2)$$

Puede verificarse que si

1.  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow X_C = \frac{-1}{\omega C} \rightarrow -\infty$  y en consecuencia  $|I| \rightarrow 0$
2.  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow X_L = \omega L \rightarrow \infty$  y en consecuencia  $|I| \rightarrow 0$
3.  $\omega$  es tal que  $\omega L = 1/\omega C$ , resulta que la reactancia total  $X_T$ , es  $X_T = X_L + X_C = 0$ , con lo cual, para este circuito,  $|I|$  alcanza su valor máximo:  $|I|_{\text{Max}} = |V|/R$ . Esto ocurre para

$$\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}} \quad (3.3)$$

En la Fig 3.2 se expone el gráfico de  $I(\omega)$  para tres casos particulares de  $R$ ,  $L$  y  $C$ . La condición  $\omega = \omega_0$  para la cual  $X_T = 0$  define lo que se denomina resonancia del circuito. Se dice que un circuito esta en resonancia (de fase) cuando la corriente que a el ingresa esta en fase con la tensión que se le aplica. Obviamente si  $X_T = 0$ ,  $V = I R$  y el defasaje entre  $V$  e  $I$  es nulo.

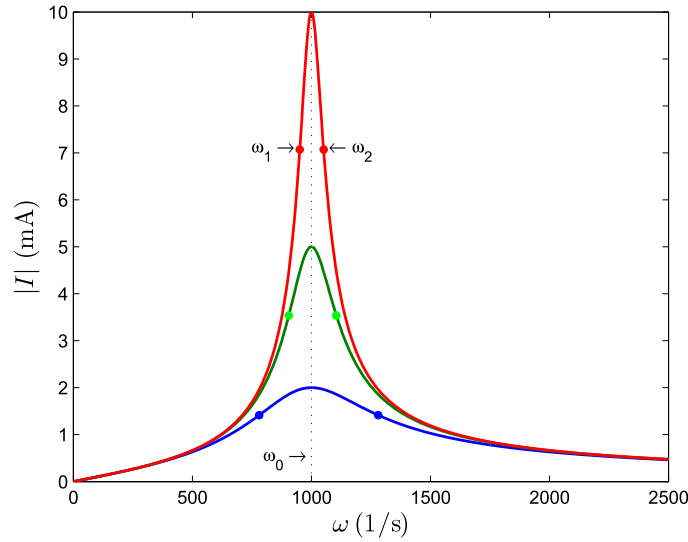


Figura 3.2: Amplitud de la corriente circulante por un circuito  $RLC$  serie alimentado por una fuente armónica de 1 V de pico, en función de la frecuencia, para los casos:  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$  y  $R_3 = 500 \Omega$ . En los tres casos se mantuvo:  $L = 1 H$  y  $C = 1 \mu F$ , lo que implica  $\omega_0 = 1000 (1/s)$  para todos ellos. Se destacan en cada caso las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que permiten definir los correspondientes anchos de banda como  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  (ver texto).

Cuando  $\omega = \omega_0$  se tiene:

$$V_L(\omega_0) = j \omega_0 L \cdot I(\omega_0) = j \omega_0 L \cdot \frac{V}{R} = j \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V \quad (3.4)$$

$$V_C(\omega_0) = -j / \omega_0 C \cdot I(\omega_0) = -j \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V \quad (3.5)$$

luego  $V_L(\omega_0) + V_C(\omega_0) = 0$  para todo instante, y por tanto,

$$V_R(\omega_0) = V \quad (3.6)$$

en cuanto a las caídas de tensión eficaces sobre cada uno de los tres elementos de circuito, en resonancia, se tiene:

$$V_{L\text{ef}}(\omega_0) = \frac{|V_L(\omega_0)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V_{\text{ef}} \quad (3.7)$$

$$V_{C\text{ef}}(\omega_0) = V_{L\text{ef}}(\omega_0) \quad (3.8)$$

$$V_{R\text{ef}}(\omega_0) = V_{\text{ef}} \quad (3.9)$$

siendo  $V_{\text{ef}}$  la tensión eficaz aplicada por la fuente:  $V_0/\sqrt{2}$ . La potencia disipada por el circuito esta dada por

$$P(\omega) = I_{\text{ef}}^2(\omega) R = \frac{|I|^2}{2} R = \frac{V_{\text{ef}}^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} R \quad (3.10)$$

cuyo gráfico puede verse en la Fig 3.3 Una manera de caracterizar el ancho de la curva

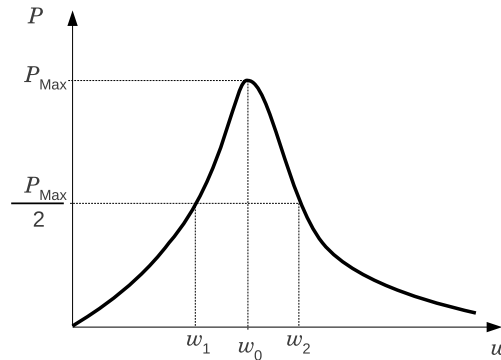


Figura 3.3: Potencia disipada en un circuito RLC serie en función de la frecuencia.

$P(\omega)$  es mediante las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para las cuales la potencia disipada se reduce a la mitad de la máxima. La condición:

$$P(\omega) = \frac{P_{\text{Max}}}{2} \quad (3.11)$$

conduce a una ecuación bicuadrática para  $\omega$ , cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < \omega_0 & \omega_2 &= \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} > \omega_0 \\ \omega_3 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < 0 & \omega_4 &= \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\alpha = R/2L$ . Las 2 últimas carecen de sentido. Las 2 primeras permiten definir el ancho de la curva como:

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}} \quad (3.13)$$

al que también se denomina *ancho de banda* del circuito.

Para caracterizar la función  $P(\omega)$  se define:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \gtrless 1 \quad (3.14)$$

llamado *factor de mérito* o *de calidad*. Este número mide la *selectividad* del circuito para disipar potencia: si  $Q \gg 1$  la curva  $P(\omega)$  es muy estrecha en torno de  $\omega_0$  y el circuito disipa potencia en un rango pequeño de frecuencias:  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ . Por el contrario, si  $Q \ll 1$  la curva es ancha y por lo tanto se disipa potencia en un rango amplio de frecuencias.

Finalmente consideremos la impedancia de entrada del circuito RLC serie, vista por la fuente

$$|Z_{AB}(\omega)| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} \quad (3.15)$$

cuyo gráfico puede verse en la Fig 3.4. A frecuencias bajas ( $\omega < \omega_0$ ) el módulo de la

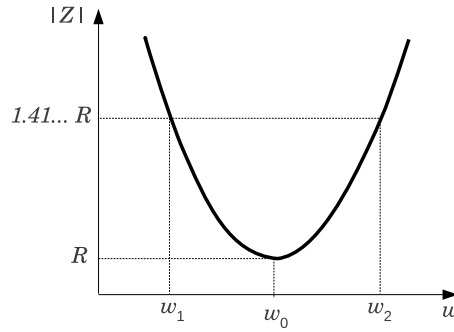


Figura 3.4: Impedancia de entrada de un circuito RLC serie en función de la frecuencia.

reactancia capacitiva es mayor que la reactancia inductiva ( $1/\omega C > \omega L$ ) por lo tanto:

$$X_T = X_C + X_L < 0 \quad (3.16)$$

y se dice que el circuito se comporta capacitivamente. A frecuencias altas ( $\omega > \omega_0$ ),  $X_L > |X_C| \Rightarrow X_T > 0$  y se dice que el circuito se comporta inductivamente.

A la frecuencia de resonancia,  $X_L = |X_C| \Rightarrow X_T = 0$ , el circuito se comporta como una resistencia pura y además  $|Z_{AB}|$  es mínima.

Como

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = \frac{V_{\text{ef}}^2 R}{|Z_{AB}|^2} \quad (3.17)$$

se demuestra fácilmente que las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de potencia mitad corresponden a la condición:

$$|Z_{AB}(\omega)| = \sqrt{2} R = \sqrt{2} |Z_{AB}(\omega)|_{\min} \quad (3.18)$$

### 3.2. Circuito RLC paralelo

Considere el circuito de la figura 3.5. La frecuencia de resonancia de fase,  $\omega_{0\parallel}$ , vale

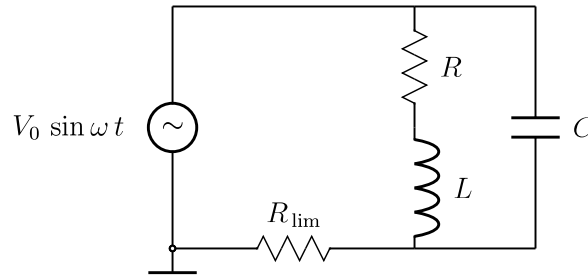


Figura 3.5: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un circuito RLC paralelo en el que se considera una resistencia limitadora,  $R_{\text{lim}}$ .

$$\omega_{0\parallel} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = \omega_0 \sqrt{1 - Q^{-2}} \quad (3.19)$$

donde  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  es la frecuencia de resonancia del circuito RLC serie, y  $Q$  es el factor de mérito ya estudiado. Note que  $\omega_{0\parallel}$  es independiente de la resistencia limitadora  $R_{\text{lim}}$ , y que tiende a  $\omega_0$  por la izquierda a medida que  $R \rightarrow 0$ .

La impedancia,  $Z_{\parallel}$ , del paralelo RLC propiamente dicho, esto es, excluyendo  $R_{\text{lim}}$ , satisface

$$|Z_{\parallel}|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{(R^2 + \omega^2 L^2)}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (3.20)$$

Puede verificarse que

$$\lim |Z_{\parallel}| = \begin{cases} R & \text{si } \omega \rightarrow 0 \\ 0 & \text{si } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.21)$$

y que en resonancia,

$$|Z_{\parallel}(\omega_{0\parallel})| = Q^2 R = \frac{1}{R} \frac{L}{C} \quad (3.22)$$

#### Observaciones

1. De la ecuación (3.22) se concluye que la impedancia de un circuito RLC paralelo en resonancia puede ser infinita si  $R \rightarrow 0$ , o bien, expresado con mayor propiedad, puede ser ilimitada si  $R$  es arbitrariamente menor que  $\sqrt{L/C}$ .