

## Determinación del módulo de Young

### OBJETIVOS:

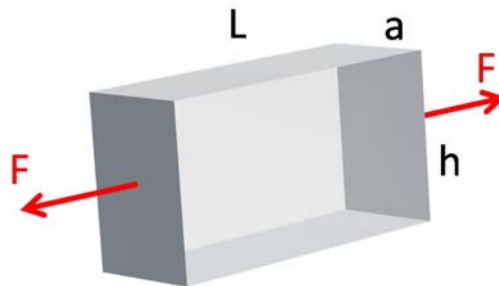
- Determinación del módulo de Young de diversos materiales a partir de la flexión estática y dinámica de una viga en voladizo
- Medición de señales luminosas variables en el tiempo
- Manejo de láser y fotodiodos

### CONCEPTOS NECESARIOS PARA LA PRÁCTICA:

- Deformación elástica, módulo de Young
- Difracción de luz en una rendija

### INTRODUCCIÓN BREVE:

La elasticidad es la capacidad de los materiales de deformarse de manera reversible, e.d. de recuperar su tamaño y su forma cuando se quitan las fuerzas que les producen las deformaciones. Este comportamiento elástico se encuentra en mayor o menor medida en todos los cuerpos sólidos. Si la fuerza es suficientemente pequeña, el desplazamiento relativo de los diferentes puntos del material es además proporcional a la tensión aplicada (fuerza por unidad de área transversal).



**Figura 1.** Estiramiento de una barra rectangular sometida a una tensión uniforme de tracción

Por ejemplo, si se toma un bloque rectangular de longitud  $L$ , ancho  $a$  y altura  $h$ , como el de la figura 1, y se le aplica entre los extremos una fuerza  $F$ , la longitud aumenta una cantidad  $\Delta L$  siguiendo la ley de Hooke:

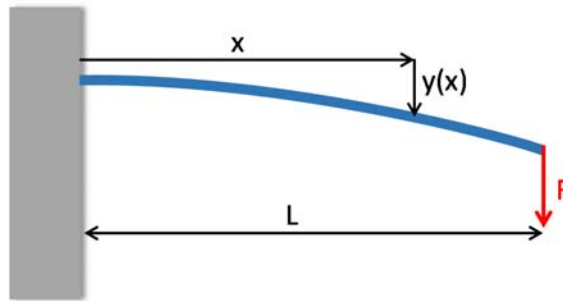
$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

donde  $A$  es el área transversal del bloque ( $A = ah$ ), y  $E$  es una propiedad natural del material, conocida como módulo de Young. La elongación es proporcional a  $F$  y a la longitud inicial del material, e inversamente proporcional al área transversal del bloque. Esto es porque se supone que la fuerza, y las deformaciones, se distribuyen en todos el volumen del cuerpo.

En esta práctica, se intentará determinar el módulo de Young de distintos materiales, midiendo la flexión de una barra cilíndrica producida por la aplicación de una fuerza en uno de sus extremos. Para una barra sujeta en un extremo (en voladizo) como la que se muestra en la figura

2, es posible calcular la deformación de la barra (para deformaciones pequeñas). Con el sistema de coordenadas de la figura 2, se puede calcular la flexión y de una barra cilíndrica en función de la fuerza (pequeña) aplicada sobre el extremo libre de la misma:

$$y(x) = \frac{32 F}{\pi d^4 E} \left( Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (2)$$



**Figura 2.** Barra en voladizo flexionada debido a la fuerza F en el extremo libre.

donde  $y(x)$  es el apartamiento de la posición de equilibrio a la distancia  $x$  del extremo fijo. La fuerza aplicada es  $F$ ,  $d$  es el diámetro y  $L$  el largo de la barra desde el punto fijo hasta donde pende la masa  $m$  (el desarrollo teórico completo que lleva a esta expresión se encuentra en R.P. Feynman, Física, Volumen II).

La expresión (2) considera el problema estático, es decir, la configuración de equilibrio de la barra para una fuerza  $F$  aplicada al extremo. Entonces, midiendo la flexión de la barra producida por una fuerza conocida es posible determinar el módulo de Young del material.

Otra forma de medir la elasticidad del material es analizar las oscilaciones elásticas de un cuerpo producidas por una perturbación mecánica inicial. Análogamente a como la constante elástica de un resorte determina la frecuencia de oscilación de una masa unida al mismo, el módulo de Young del material, junto con las dimensiones espaciales y los vínculos del problema determinan los modos de oscilación mecánica de un objeto.

Considerando la misma barra en voladizo de la figura 2, si  $y(x,t)$  representa el apartamiento de la posición de equilibrio vertical, en una posición horizontal  $x$  respecto del origen a un tiempo  $t$ , la forma más general de escribir el movimiento de una barra flexionada es:

$$y(x, t) = [A \cos(k_n x) + B \cosh(k_n x) + C \sin(k_n x) + D \sinh(k_n x)] \sin(\omega_n t + \varphi_0) e^{-\alpha t} \quad (3)$$

donde  $k_n$  (que tiene unidades de  $1/\text{longitud}$ ) define el modo espacial de oscilación, el cual tiene asociada una frecuencia angular de oscilación  $\omega_n = 2\pi f_n$ .

$k_n$  y  $\omega_n$  están vinculadas a través de la relación de dispersión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{IE}{\rho_l} k_n^4 - \alpha^2} \quad (4)$$

donde  $\rho_l$  es la densidad de la barra por unidad de longitud,  $I$  es el momento de inercia "seccional" que para un cilindro de diámetro  $d$  es:  $I = \pi d^4/64$ , y  $\alpha$  es una constante de amortiguamiento que tiene unidades de  $s^{-1}$ .

Las condiciones de contorno son particulares de cada problema; para una viga sujeta firmemente en uno de sus extremos y libre en el otro, estas son las siguientes:

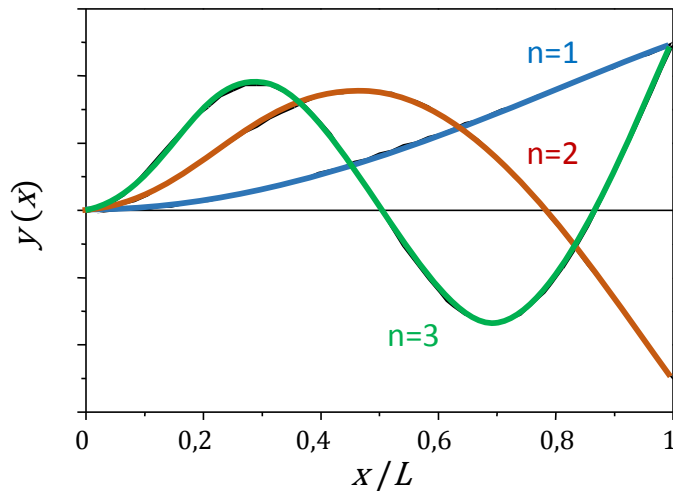
$$y(0, t) = y'(0, t) = 0 \quad (5)$$

$$y''(L, t) = y'''(L, t) = 0 \quad (6)$$

Las condiciones (5) especifican que el extremo en  $x = 0$  está fijo, y las condiciones (6) que el extremo en  $x = L$  está libre. Este juego de condiciones son las que definen cuáles son los modos de flexión de la barra. Estos son los que cumplen la siguiente condición:

$$\cos(k_n L) \cosh(k_n L) + 1 = 0 \quad (7)$$

Los valores de  $k_n$  que satisfacen esta ecuación trascendente determinan los modos de oscilación espacial de la barra cilíndrica. Los tres primeros modos de la barra vibrando se muestran en la figura 3. Resulta:  $k_1 = 1.875/L$ ,  $k_2 = 4.694/L$ ,  $k_3 = 7.855/L$ , etc. donde  $L$  es el largo en voladizo de la barra.



**Figura 3.** Los tres primeros modos de la barra fija en  $x = 0$ , con el extremo  $x = L$  libre.

El desarrollo teórico completo de este tema se puede encontrar en L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1959) y en S.C. Hunter, *Mechanics of continuous media* (J. Wiley & Sons, New York, 1986).

## DISPOSITIVO y DESARROLLO EXPERIMENTAL

En esta parte de la práctica se propone registrar la flexión de la varilla por medios ópticos, tanto para el método estático como para el dinámico. El dispositivo experimental sugerido se muestra esquemáticamente en la figura 4. La varilla se fija en un extremo. Cerca del extremo libre se adhiere una lámina filosa a la varilla, que junto con una segunda lámina filosa fija a la mesa de trabajo y regulable en altura, conforman una rendija que difracta la luz de un haz láser. Sobre el extremo ( $x=L$ ) libre se cuelgan distintos pesos que flexionan la barra y producen pequeñas variaciones del ancho de la rendija. El ancho de la rendija se detecta en forma muy sensible analizando el patrón de difracción de Fraunhofer del haz láser sobre una pantalla.

La intensidad del patrón de difracción de campo lejano es de la forma:

$$I(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi h}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{2\pi h}{\lambda} \sin\theta} \right]^2 \quad (5)$$

donde  $\theta$  es el ángulo desde la rendija al plano de observación,  $h$  el tamaño de la rendija y  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación. De esta forma se puede determinar el valor del módulo de Young en una experiencia estática.

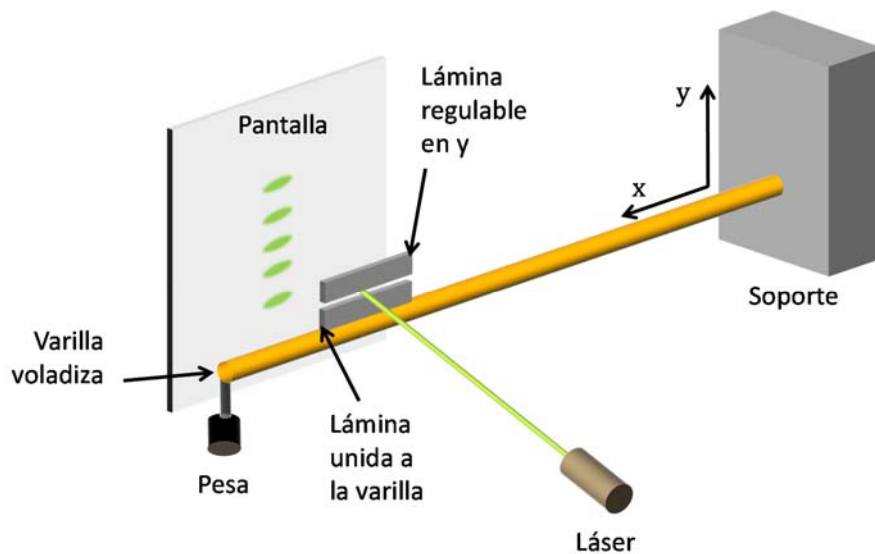


Figura 4. Esquema del dispositivo experimental.

Para aplicar el método dinámico, se puede utilizar el mismo sistema, pero ya no será necesario medir con precisión la magnitud de la flexión. Lo que se busca en este caso es medir las oscilaciones de la varilla estimuladas por una perturbación inicial. Para este fin se reemplazará la pantalla por un fotodiodo apropiadamente ubicado para detectar la intensidad de la luz transmitida en el eje óptico del sistema. Si se perturba el sistema, la varilla normalmente tenderá a oscilar en su modo más bajo ( $n=1$ ). No obstante, se puede perturbar a la varilla de manera que inicialmente el modo excitado sea alguno de los modos superiores. De analizar las oscilaciones, y mediante la ecuaciones 3 y 4, es posible determinar el módulo de Young.

En la tabla 1 se muestran valores típicos de materiales para sean comparados con los valores obtenidos en los experimentos.

Material	E [GPa]
Aluminio	71
Bronce	110
Vidrio	40 – 90
Cobre	123
Acero	210
Grilón	1,5 – 3,8
Teflon	0,4 – 0,6
Acrilico	2,2 – 2,4

**Tabla 1.** Módulo de Young de diferentes materiales.

**ALGUNAS PREGUNTAS A RESPONDER DURANTE LA PRÁCTICA E INCLUIR EN EL INFORME:**

- Qué ventaja puede tener medir la flexión de la varilla mediante el patrón de difracción?
- Cuáles son las hipótesis de trabajo para que la aproximación de difracción de Fraunhofer sea válida?
- Como puede perturbarse a la varilla para excitar modos superiores de oscilaciones?

**PREGUNTAS PARA EL MINI EXAMEN PREVIO A LA PRÁCTICA:**

- 1- Grafique una curva típica de tensión-deformación e identifique las distintas etapas.
- 2- Qué es el módulo de Young de un material isotrópico?
- 3- Qué es el módulo de Young de un material anisotrópico?
- 4- Qué significa que un material tenga un módulo de Young grande o pequeño?
- 5- Describa qué es un material dúctil, frágil, rígido y duro?
- 6- El módulo de Young es el mismo en tracción y en compresión? Por qué?
- 7- Depende el módulo de Young de la temperatura?
- 8- Qué es la eficiencia cuántica de un fotodiodo?
- 9- Qué es la responsividad de un fotodiodo?
- 10- Explique la operación de un fotodiodo en modo fotovoltaico y en modo de fotocorriente.

**BIBLIOGRAFÍA**

1. R.P. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, Vol. II (Addison-Wesley, 1987).
2. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity (Pergamon Press, Oxford, 1959).
3. S.C. Hunter, Mechanics of continuous media (J. Wiley & Sons, New York, 1986).
4. W.B. Callister, Materials Science and Engineering, (J. Wiley & Sons, New York, 1995).