Considere N mediciones (x_i, y_i), donde los y_i son independientes y todos con el mismo error σ, ésto es, $\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = \delta_{ij}\sigma^2$. Los parámetros de la recta $y{=}a_1 + a_2 x$ que mejor ajusta los datos surgen de minimizar la suma $\chi^2 = \sum[y_i - (a_1 + a_2 x_i)]^2$, obteniéndose la conocida fórmula de cuadrados mínimos

$$\begin{cases} a_1 = (\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i)/\Delta \\ a_2 = (N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i)/\Delta \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta = N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \tag{1}$$

(a) Usando la fórmula de propagación de errores muestre que la matriz de covarianza de los paráme-tros de la recta es

$$\mathrm{Cov}(a_1, a_2) = \frac{\sigma^2}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & N \end{pmatrix} \tag{2}$$

Analice intuitivamente por qué la correlación es negativa si el promedio de los datos está del lado positivo de la abscisa, positiva en el caso contrario, y por qué la pendiente y la ordenada al origen no están correlacionadas si $\sum x_i = 0$.

(b) Encuentre, con su error, los parámetros de la recta que mejor ajusta los siguientes datos, con $\sigma = 0{,}3$. Grafique los datos, con su error, y la recta obtenida para $0 \leq x \leq 5$.

X	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
Y	2.78	3.29	3.29	3.33	3.23	3.69	3.46	3.87	3.62	3.40	3.99

(c) **Ejercicio para entregar.** A partir de esta recta prediga, con su error, el valor esperado y_a para un cierto x_a. No olvide usar la matriz de covarianza completa. Grafique $y_a(x_a)$, y agréguelo al gráfico anterior en forma de banda de error. Encuentre qué valor de x_a minimiza el error de y_a, e interprete la magnitud de este valor mínimo. Discuta por qué el error aumenta para valores de x_a alejados de la región donde se hicieron las mediciones.

(d) **Ejercicio para entregar.** Grafique la banda de error que obtiene si ignora el término de correlación en la propagación de errores y discuta por qué ésta es claramente errónea.