Practica de Laboratorio 5. CRISTALES SONICOS 2D

Por Alejandro Giacomotti

Introducción

Un cristal sónico consiste en un medio (fluido, sólido o mezcla de ambos) que presenta una estructuración espacial de la densidad (ρ) y/o de las constantes elásticas (B), en una escala del orden de la longitud de onda del sonido. Una clase típica de cristales sónicos consiste en un arreglo de objetos sólidos (metal, madera…) en un fluido, por ejemplo aire, donde existe una gran diferencia entre densidades y velocidades del sonido ($c = \sqrt{B/\rho}$). Por ejemplo, c_{aire}=343 m/s mientras que c_{acero}=5790m/s, y ρ_{aire}=1.2 kg/m^3 mientras que ρ_{acero}=7850 kg/m^3. Como consecuencia resulta un gran cociente de impedancias, $Z_c/Z_h=(c_c\rho_c)/(c_h\rho_h)\sim10^5$, que implica una reflectividad alta en las interfases, con lo que el problema puede tratarse como si los objetos sólidos fueran fluidos con gran densidad; así puede usarse la ecuación de propagación del sonido en un fluido,

$$\frac{1}{B}\frac{\partial^2 p}{\partial\tau^2} - \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right) = 0, \qquad [1]$$

donde p es la presión y τ=ct es el tiempo normalizado, sin necesidad de usar la ecuación de ondas elásticas en un sólido, lo que resulta una simplificación substancial. La ecuación [1] es más simple que la ecuación para un sólido; en particular, no genera ondas transversales. En este contexto puede entonces considerarse el fenómeno como *scattering* de objetos impenetrables.

Así, los resultados suelen ser independientes del material que se usa como objeto difusor, siempre y cuando el cociente de impedancias sea alto. Un ejemplo de un sistema de estas características es la la escultura de Eusebio Sempere expuesta en el Museo Juan March, Madrid (Fig. 1), que consiste en un arreglo cuadrado de cilindros de metal de 2.9 cm de diámetro, separados 10 cm. Dicha escultura presenta algunas de las características propias de los cristales sónicos, como ser una banda prohibida, lo que dio impulso recientemente a la investigación en este campo.

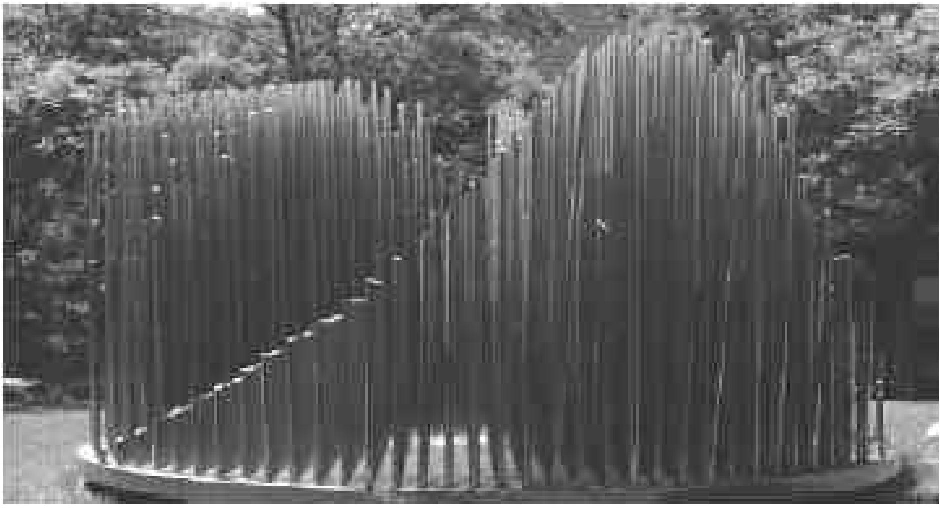

Fig. 1. Escultura de E. Sempere en el museo Juan March (Madrid). Se trata de tubos de acero de 2.9 cm de diámetro separados 10 cm. El sonido se atenúa para ciertas direcciones (band gap parcial)

Diagrama de bandas

El diagrama de bandas sónico es la relación de dispersión de los modos que se establecen en la estructura. Son soluciones estacionarias de la ec. [1], es decir soluciones de tipo $p(\vec{r},\tau) = p(\vec{r})\,e^{i\omega\tau}$. Como las constantes ρ y B presentan una estructuración periódica puede escribirse

$$\rho(\vec{r})^{-1} = \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{G}}^{-1}\, e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \qquad [2]$$

$$B(\vec{r})^{-1} = \sum_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^{-1}\, e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}, \qquad [3]$$

donde $\vec{G}$ son vectores de la red recíproca ($\vec{R}\cdot\vec{G} = 2\pi n$, con $\vec{R}$ los vectores de la red directa). Las soluciones son los llamados modos de Bloch,

$$p(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, u_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{G}} p_{\vec{k},\vec{G}}\, e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \qquad [4]$$

donde $\vec{k}$ es el vector de onda de Bloch, y $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ una función periódica que caracteriza la distribución de energía del modo. Introduciendo [2]-[4] en [1] se obtiene una ecuación de autovalores para $p_{k,G}$:

$$\sum_{\vec{G}'} \left[\omega^2 b_{\vec{G}-\vec{G}'}^{-1} - \rho_{\vec{G}-\vec{G}'}^{-1} (\vec{k}+\vec{G})\cdot(\vec{k}+\vec{G}')\right] p_{\vec{k},\vec{G}} = 0 \qquad [5]$$

Para una red de cilindros resulta

$$\rho_{\vec{G}}^{-1} = \frac{\rho_h}{\rho_c} f + (1-f), \text{ para } |G| = 0 \qquad [6]$$

$$\rho_{\vec{G}}^{-1} = \left(\frac{\rho_h}{\rho_c} - 1\right) 2f\, \frac{J_1\left(|\vec{G}| r_0\right)}{|\vec{G}| r_0}, \text{ para } |G| \neq 0 \qquad [7]$$

donde J_1 es la funcion de Bessel de orden 1 y f el factor de llenado (para una red cuadrada $f=\pi r_0^2/a^2$). Expresiones idénticas a [6]-[7] se obtienen para b^{-1}_G.

La ec. [5] es una ecuación de autovalores generalizada, que puede resolverse fácilmente usando MATLAB (ver apéndice para la descripción de la rutina “sonicbands.m”). Para una red cuadrada de cilindros de acero en aire, de 1.9 cm de diámetro y a=2.5 cm, usando 529 ondas planas se obtiene el diagrama de bandas de la Fig. 2. Aparecen dos bandas prohibidas en el rango de frecuencias mostrado: la primera se extiende de 7.2 a 8.6 kHZ, y la segunda alrededor de 27 kHz. Para frecuencias en el interior de la banda prohibida no existen modos de Bloch asociados, por lo tanto la transmisión tiende a cero.

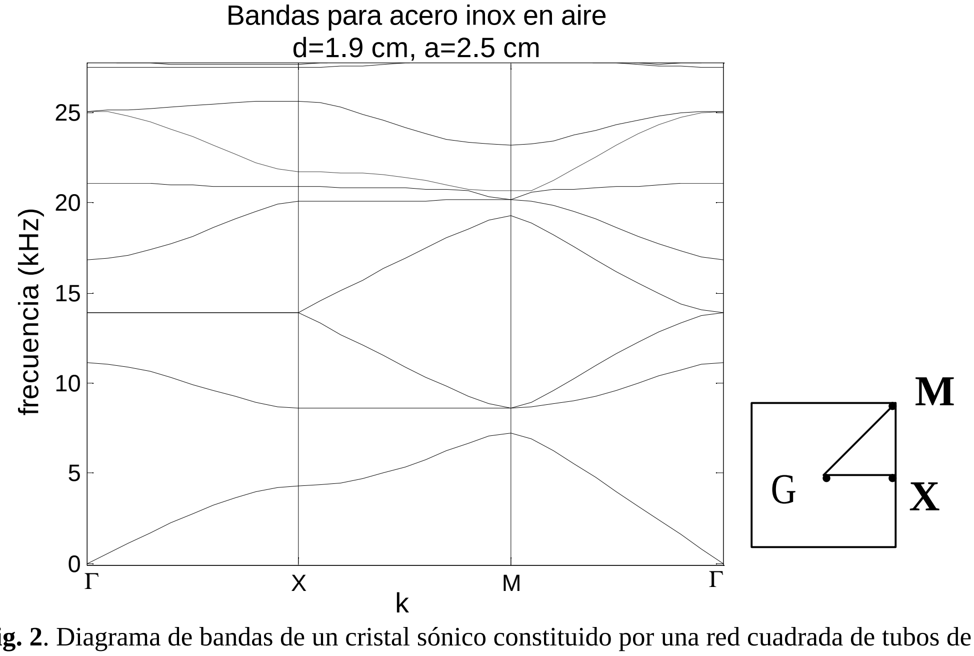

Fig. 2. Diagrama de bandas de un cristal sónico constituido por una red cuadrada de tubos de acero de a=2.5 cm de período y d=1.9 cm de diámetro. Las bandas se obtuvieron a partir de la rutina “sonicbans.m” descripta en el APENDICE (ver ejemplo).

Es imporatante señalar que la frecuencia central del primer gap es del orden de 8 kHz, con lo que la longitud de onda correspondiente es de $\lambda=c/\nu\sim4.3$ cm. Notar que $\lambda\sim2a$, relación que corresponde al primer orden de difracción en una red de Bragg, $m\lambda=2a \sin\theta$, con θ el ángulo de incidencia respecto de la dirección de los planos cristalinos, para $\theta=90°$. Esto significa que una onda de longitud λ que se propaga perpendicular a un conjunto de planos separados $\lambda/2$ tiene una componente que se refleja totalmente: todas las ondas reflejadas especularmente en los distintos planos acumulan una diferencia de fase multiplo de 2π, es decir que la interferencia es constructiva, lo que refuerza la onda reflejada.

Experimento: Medición del band-gap acústico de un arreglo periódico bidimensional de objetos sólidos

Objetivos

Los objetivos de esta práctica son:

I. Medir la banda prohibida en un cristal sónico bidimensional.
II. Estudiar la dependencia de dicha banda, y de las características del espectro de transmisión, con el período de la red.
III. Estudiar cavidades sónicas introduciendo "defectos" en el cristal.
IV. Medir las bandas sónicas

Los primeros 3 objetivos podrían realizarse en 2 clases. El cuarto objetivo es más ambicioso, pudiendo proponerse como práctica especial.

Montaje experimental

Material:

- 100 tubos de aluminio de 19 mm de diámetro x 30 cm de largo.
- 100 torretas de aluminio macizo.
- 100 tornillos M6; 5cm de largo.
- Tabla óptica
- Micrófono y parlante.
- Generador de funciones
- Osciloscopio
- Amplificador Lockin
- Tubito de cobre de 40 cm de largo y 3 mm de diámetro

Sugerencias para el armado del cristal sónico

- Atornillar las torretas a la tabla óptica. Luego meter los tubos a presión. Es importante que los tubos, una vez introducidos en las torretas, no tengan "juego" lateral pues quiere evitarse la vibración de los mismos. Un consejo para eliminar dicha vibración es pegar trozos de cinta scotch de unos 3 cm de largo en el interior del tubo, en dirección longitudinal, y luego introducirlo en la torreta. Puede trabajarse con dos tamaños de red distintos: 7x7 cilindros, y 10x10.
- En configuración de transmisión, colocar una plancha de goma-espuma sobre el cristal para atenuar la reflexión en la interfase entre los cilindros y el aire de las ondas que se propagan hacia arriba.

Sugerencias para las mediciones

1) Estudios previos 1: caracterización del instrumental. Mide la función de transferencia parlante/micrófono, es decir amplitud en función de frecuencia para el micrófono pegado al parlante (por qué?). Puedes usar este espectro para normalizar los espectros que midas luego con el cristal sónico. Para barrer la frecuencia te sugerimos dos métodos:

    a. Un generador de funciones con barrido de frecuencia (SWEEP), conectado a un osciloscopio. Elije las frecuencias de START y STOP, y tiempo de SWEEP. En qué cambia hacer el barrido más lento o más rápido? Cómo obtener la respuesta en frecuencia a partir de la señal temporal del micrófono? Qué pasaría si se usaran pulsos cortos en lugar de barridos?
    b. Un generador de funciones y un Lockin, con un programa que cambia la frecuencia del generador entre dos valores estipulados cada Δf. Elije el tiempo de integración en el lockin. Cuanto debe ser ese tiempo? Sugerencia: 0.2 a 1 ms. Otra sugerencia: como mides con lockin puedes bajar mucho la amplitud de excitación, por ejemplo 50 mV; con esto evitarás molestias sonoras para ti y para los que te rodean…

NOTA: un parlante pequeño trabaja bien para altas frecuencias, de manera que en principio puedes realizar barridos hasta frecuencias cercanas a la de corte del micrófono (frecuencia de corte nominal=18 kHz). Un rango típico para trabajar es entre 2 kHz y 14 kHz.

Preguntas: - Qué características presenta el espectro? Es plano? Se debe al parlante, al micrófono, o a los dos?

- Cómo podrías distinguir la influencia de uno y otro?

2) Estudios previos 2: influencia del entorno. Como vas a poner un objeto complicado entre parlante y micrófono, seria recomendable que estudies lo que pasa simplemente colocando parlante y micrófono separados una cierta distancia (approx 30 cm), parecida a la que resultará cuando coloques el cristal. Mide el espectro y normaliza por el del punto 1. Cambia el entorno (e.g., aumenta la distancia al piso) y observa qué cambia. Prueba colocando goma-espuma en el piso y observa las diferencias.

Preguntas: - Qué características tienen los espectros?

- Puedes identificar el origen de las oscilaciones?
- Qué conclusiones sacas respecto de una medida de espectro sonoro y la influencia de los objetos que rodean el experimento?
- Es útil la goma-espuma para aislar sonoramente los objetos del entorno?

3) Medición del band gap. Para medir la transmisión del cristal sónico, coloca el parlante y el micrófono enfrentados de ambos lados del cristal, a corta distancia del mismo (1 o 2 cm, por qué?). Empieza por excitar en una de las direcciones de la red cuadrada (a que dirección cristalina corresponde?). Para medir la banda prohibida pueden usarse los métodos a y b del punto 1. Prueba con y sin la placa de goma-espuma sobre el cristal (ver Fig. 3).

Preguntas: - Compara las dos medidas (con métodos a y b). Cual es más ruidosa? Cómo podría disminuirse el ruido en la medición con SWEEP+FFT?

- Hay alguna atenuación en algún intervalo de frecuencias? Cuánta? Puedes decir que se trata de un band-gap? (hint: apóyate en el cálculo de bandas).

- Hay diferencia entre poner o no la plancha de goma-espuma sobre el cristal? (hint: sin medio absorbente, una onda que se propaga verticalmente y llega a la interfase con el exterior, experimenta un cambio de impedancia: el medio interior (cilindros + aire) presenta una impedancia distinta al medio exterior -solo aire-).

- Qué puedes decir del efecto del plano de la tabla óptica? En qué sentido podría considerarse un efecto “beneficioso”?

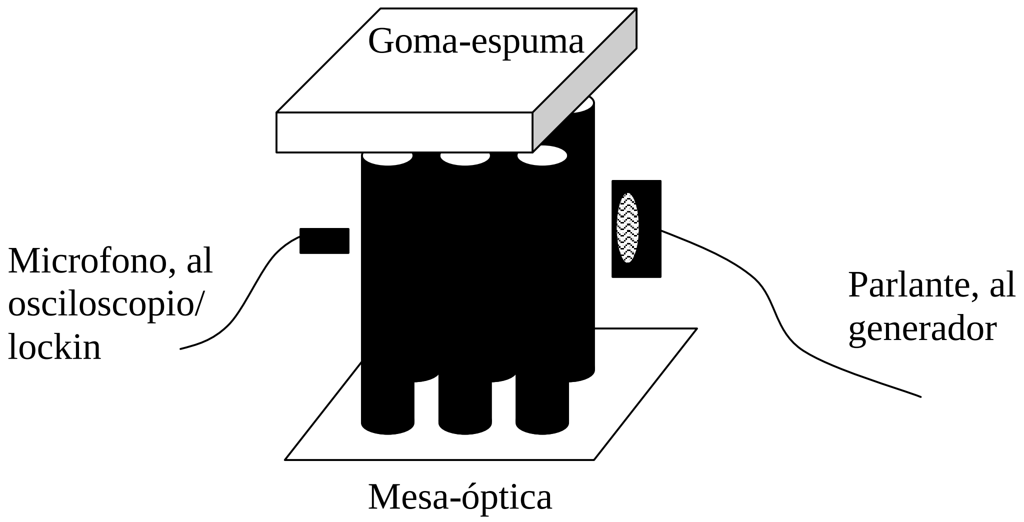

Fig. 3. Esquema del dispositivo experimental: cristal sónico bidimensional constituido por una red cuadrada de 10x10 tubos de aluminio fijados a una mesa óptica.

4) Dependencia con la dirección de excitación. Cambia la dirección de excitación/detección a la diagonal (pon mic y parlante en los extremos de la diagonal) y mide nuevamente el band-gap.

<u>Preguntas:</u> - Qué cambios observas?

- Se puede decir que en este experimento se excita en una dirección cristalina bien definida?

- Se conserva la dirección de un k incidente en el proceso de difracción en la red? Qué pasaría si enviaras una onda en una de las direcciones del cuadrado, y pusieras el mic en una de las esquinas en vez de enfrentarlo al parlante?

- Y respecto de la detección, puede decirse que en este experimento se detecta en una dirección bien definida? Como podrías mejorar la selectividad en k de tu detección?

5) Defectos sónicos. Retira un cilindro del centro de la estructura y repite la medida del punto anterior (aquí puedes quedarte con uno de los dos métodos, barrido rápido de frecuencia o lockin). Mide el espectro de transmisión, y también colocando el mic al interior del defecto.

<u>Preguntas:</u> - Cuál de las dos medidas te permite observar más claramente una resonancia de defecto? Por qué? (hint: el campo sonoro atrapado en un defecto irradia hacia todas las direcciones, no solamente la dirección de excitación) (ver Fig. 4).

- Se te ocurre cómo medir el tiempo de vida de fonón dentro de la cavidad sónica?

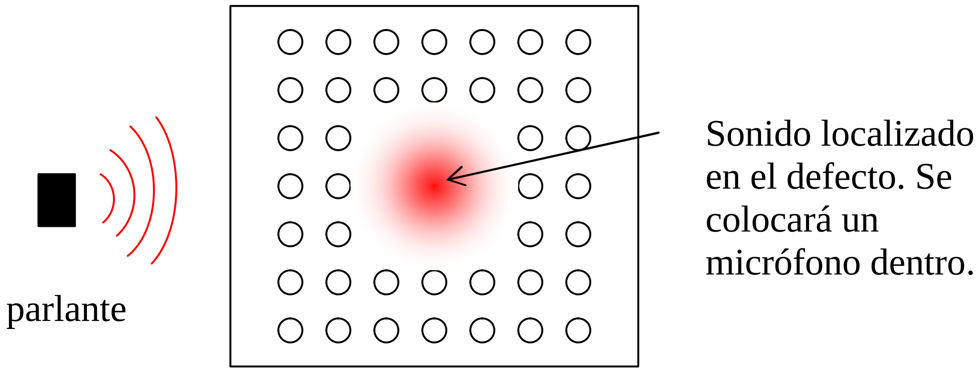

Fig. 4. Esquema de un cristal sónico 2D cuadrado visto de arriba, con un defecto en el centro. El defecto produce una cavidad acústica cuya frecuencia de resonancia estará dentro de la banda prohibida del cristal periódico.

6) Dependencia espacial del modo de cavidad. Arma un micrófono con guía de onda para poder medir en el interior de la estructura, dentro del defecto. Sugerencia: pega el extremo del tubo fino de bronce al mic (con un poco de goma espuma para aislar el sonido que no venga del tubo y fijado con cinta aisladora). Primero excita solamente el mic-guía poniendo el parlante en el otro extremo. Mide el espectro. De donde vienen las oscilaciones? Ahora puedes introducir el tubo en el interior de la estructura y medir en distintas posiciones respecto del defecto, fijando la frecuencia a la frecuencia que encontraste en el punto anterior. Puedes concluir que el modo de cavidad es un modo confinado en el defecto?

7) Dependencia del band-gap con el período de la red. Saca uno de cada dos tubos en la red (esto es equivalente a aumentar el parámetro de red al doble). Sigue habiendo un band-gap? Discute en términos de las bandas para esta nueva situación. Qué pasaría si te las ingeniaras para detectar solamente en la dirección “x”? Verías una atenuación en la transmisión? (a esto se le llama “band-gap parcial”, en lugar de “band-gap total” que es una banda prohibida en sentido estricto)

8) Medición de las bandas. Una información más completa del cristal puede obtenerse conociendo no solamente las bandas prohibidas, sino también las permitidas. Para medir la dispersión de las bandas puede procederse se la siguiente manera: para una frecuencia fija de excitación se barre la posición del detector (mic-guía por ejemplo) a lo largo de una línea en el interior del cristal (por ejemplo la dirección x). La información de amplitud y fase permite obtener la presión compleja en función de la posición, de manera que la fft (espacial) de dicha señal permitiría obtener los “k_x” presentes para una dada frecuencia. Si también se barre la frecuencia, puede accederse a la información completa, es decir $f(k_x)$. La Fig. 5 muestra el diagrama de bandas de la Fig. 2, pero en función de k_x (en MATLAB se obtiene haciendo >> plot(k(1,:),w,'k')). Observa el gap a 8 kHz. Fíjate que, como también se ve en la Fig. 2, hay dos bandas antes del borde inferior del band-gap. Entre 4.3 kHz y el borde del band-gap, una de las bandas es vertical (por qué?).
Para la medición te sugerimos colocar el mic_guía sobre una regla, de manera que al deslizarlo puedas leer directamente la posición dentro de la estructura. Como harás la fft para calcular los k, y que en general puede haber más de un modo excitado (i.e. más de una banda, ver Fig. 3), es recomendable tomar muchos puntos (más de 10). Para elegir los puntos espaciales donde realizarás las medidas recuerda que: la cantidad de períodos del cristal que barras te dará la resolución en k_x dentro de la primera zona ($0<=k_x<\pi/a$), y la

cantidad de puntos que tomes dentro de cada celda del cristal te dará la cantidad de zonas en el espacio recíproco a las que tendrás acceso. Por ejemplo, tomar 8 celdas con 2 puntos por celda resultará en 16 medidas, con lo que discretizarás una zona de Brillouin ($0<=k_x<\pi/a$ por ejemplo) en 4 puntos (8 celdas/2). Cómo se te ocurre aumentar un poco "artificialmente" la resolución en k, sin modificar el rango espacial barrido?

En cuanto a la frecuencia, realiza barridos como los que usaste para la medición del band-gap (típicamente de 2kHz a 14 kHz).

Preguntas: - Qué características generales observas en la imagen (f,k_x)?

- Qué sucede donde se encuentra el band-gap?
- Qué sucede para f<4-5 kHz?
- Notas algún cambio en la imagen entre lo que sucede para f<4-5kHz y f>4-5kHz? Como se traduce en términos de las bandas?
- Qué valores de k_x prevalecen cerca de 8 kHz, y cerca de 14 kHz? Cerca de 14 kHz, qué longitud de onda tiene el modo de más intensidad? Interpreta en términos de las bandas.
- Midiendo las bandas de esta forma, puedes decir que toda la información está en la primera zona de Brillouin? (hint: para poder relacionar la información obtenida con diagrama de bandas como se calcula, piensa en "replegar" la relación de dispersión que obtienes en los bordes de zona… Qué teorema –famoso en física del sólido- estarías usando?).

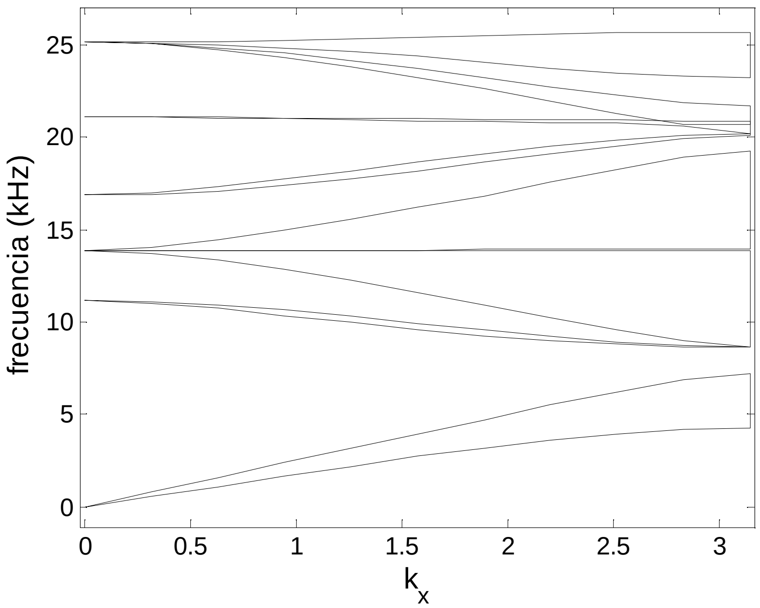

Fig. 5. Diagrama de bandas en función de kx (mismos parámetros que en la Fig. 2).