Introducción a estadística

Diego Shalom
Laboratorio 5

Abril 2016

- Medición = Comparar
    - Comparar a veces es fácil, pero no siempre.

- Estadística descriptiva: valor representativo y ancho de la distribución

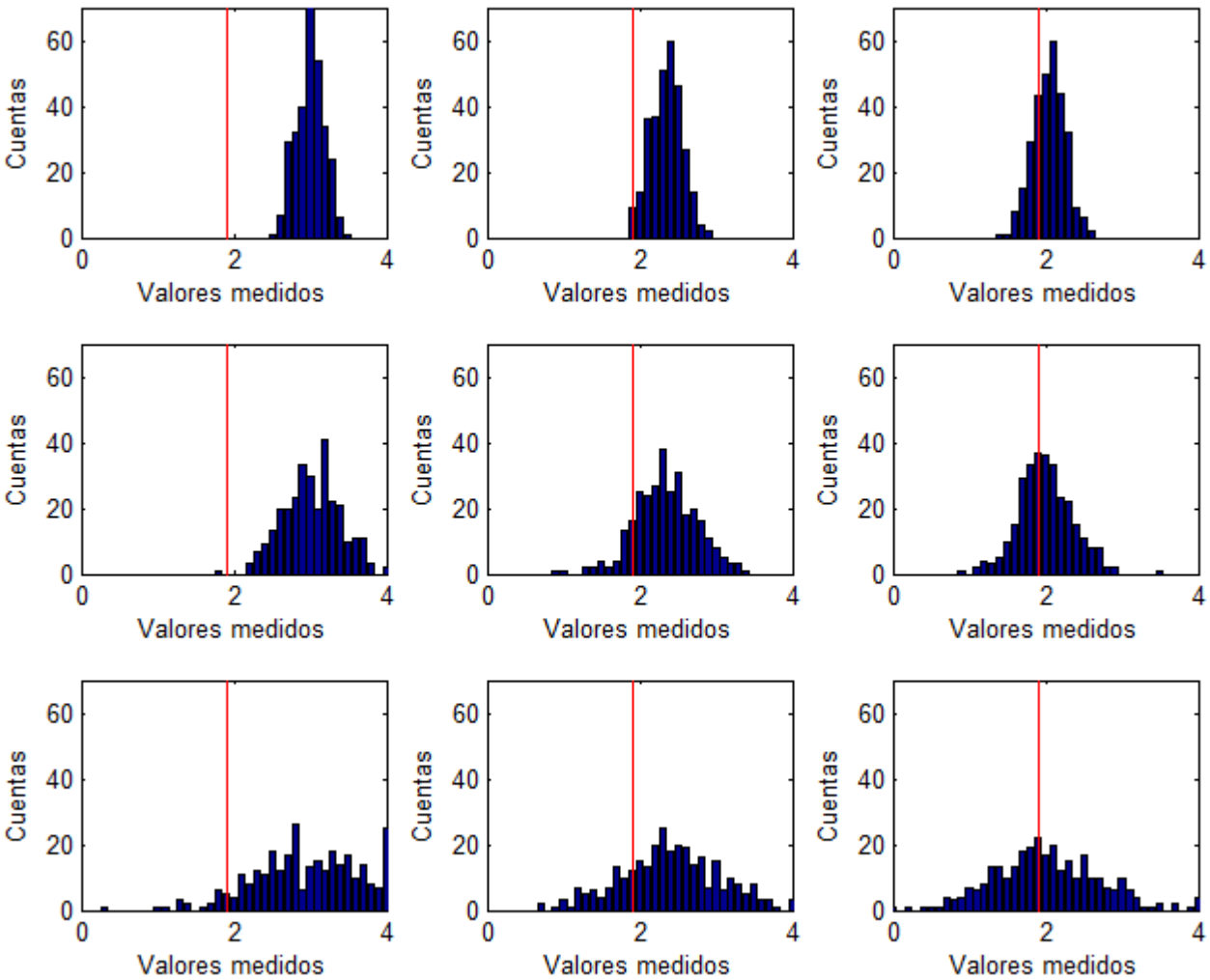
- Muestra y población.

- Tests de hipótesis

Diferentes posibilidades, algunas más fáciles y otras más difíciles de decidir.

Cambia media

Cambia ancho



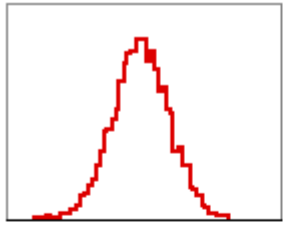
TESTS DE HIPÓTESIS

Población: el universo de datos (desconocido) sobre el que quiero determinar algo.

Muestra: lo que mido, una parte (idealmente aleatoria) de la población.

Normalidad

Distribución normal (gaussiana), tests paramétricos:



normal

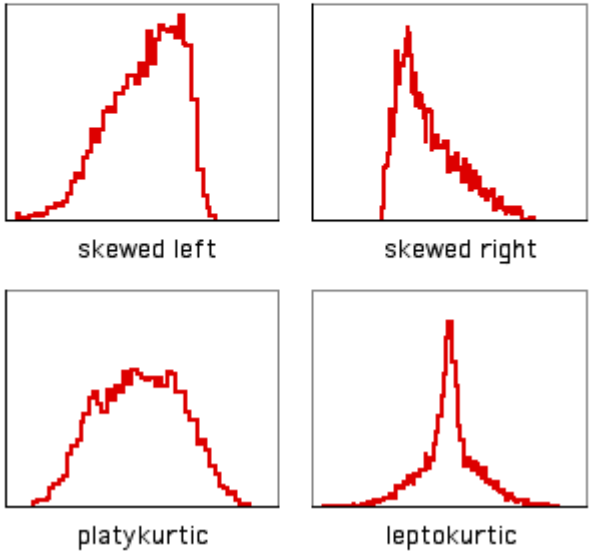
Media: el promedio de la distribución.

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvío estándar: ancho de la distribución.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

Distribución no-normal, tests no-paramétricos



Mediana: separa la mitad de los datos de un lado y la mitad del otro. $Q_2=P_{50}$

Moda: el valor más repetido, el máximo (no tiene sentido para variables continuas).

Percentil: P_n es el valor de la variable por debajo de la cual se encuentra n% de las observaciones.

Rango intercuartil: . El rango en el que se encuentra la mitad central de los datos, desde el primer cuartil $Q_1= P_{25}$ hasta el tercer cuartil $Q_3= P_{75}$.

Muestras de distintos tamaños, de una **población** normal N(m=2.05,s=0.5)

Media: el promedio de la distribución
Tiende a cte al aumentar N. Ancho típico: SEM

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

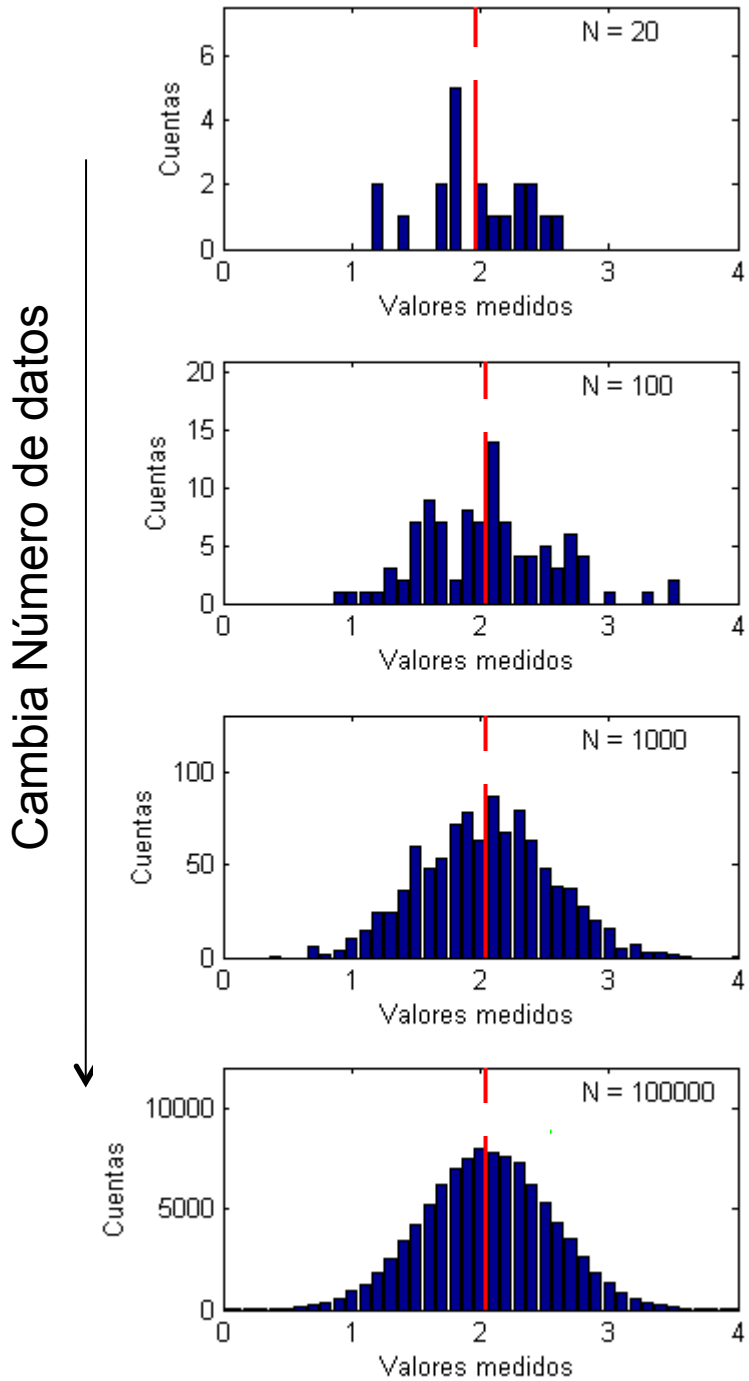
Desvío estándar: el ancho de la distribución. Describe la distribución.
Tiende a cte al aumentar N.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

Error estándar de la media (SEM): incerteza de la media.

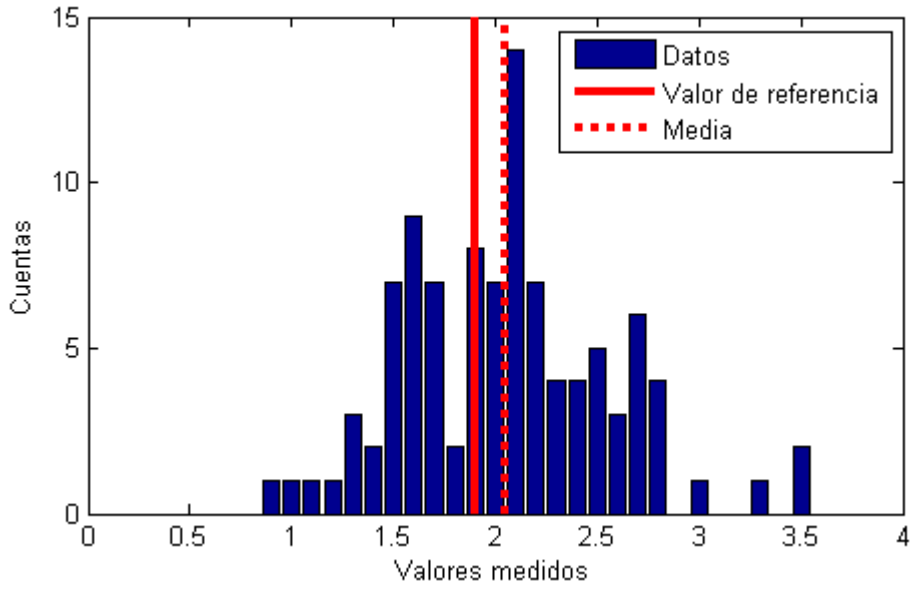
$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Se achica al aumentar N, cada vez la media tiene menos variabilidad.



En un experimento mido estos datos, y quiero determinar si su valor medio es o no es un valor determinado.

HISTOGRAMA



Ejemplo: El tiempo de respuesta de ratas normales (o el voltaje medido con la luz apagada) es **1.9 (valor de referencia)**. Al darles una droga (o prender la luz) obtengo **estos valores** experimentales de tiempo de respuesta (o voltaje).

Quiero saber: ¿Afecta la droga (la luz) al tiempo de respuesta (voltaje)?

Comparar la media (2.049) con un valor de referencia (1.9).

Tests de hipótesis

1- Enunciar una **“Hipótesis nula” (H_0)**. Y una hipótesis alternativa H_1.

2- Tomar una muestra **aleatoria** (medir).

3- Calcular un **estadístico** basado en la muestra.

4- Usar el estadístico y sus propiedades para calcular el **p-valor**, la probabilidad de obtener un estadístico al menos tan extremo como el observado, suponiendo que se cumple la hipótesis nula.

5- Elegir un umbral (criterio) para tomar una **decisión** sobre la significancia.

1- Enunciar una "Hipótesis nula" (H_0). Y una hipótesis alternativa H_1.

Planteamos la **Hipótesis nula H_0:**

"La droga **no** afecta el tiempo de reacción de las ratas" ó

"La luz **no** produce un cambio en el voltaje medido".

Asumir que esto vale implica suponer que el valor medio que medimos ($\overline{X}$) que medimos viene de una **distribución normal** con media μ_o**=1.9**. Y su diferencia (**2.049-1.9**) es debida puramente al azar.
(Además asumimos que el desvío estándar es conocido, 0.5.)

La hipótesis alternativa H_1:

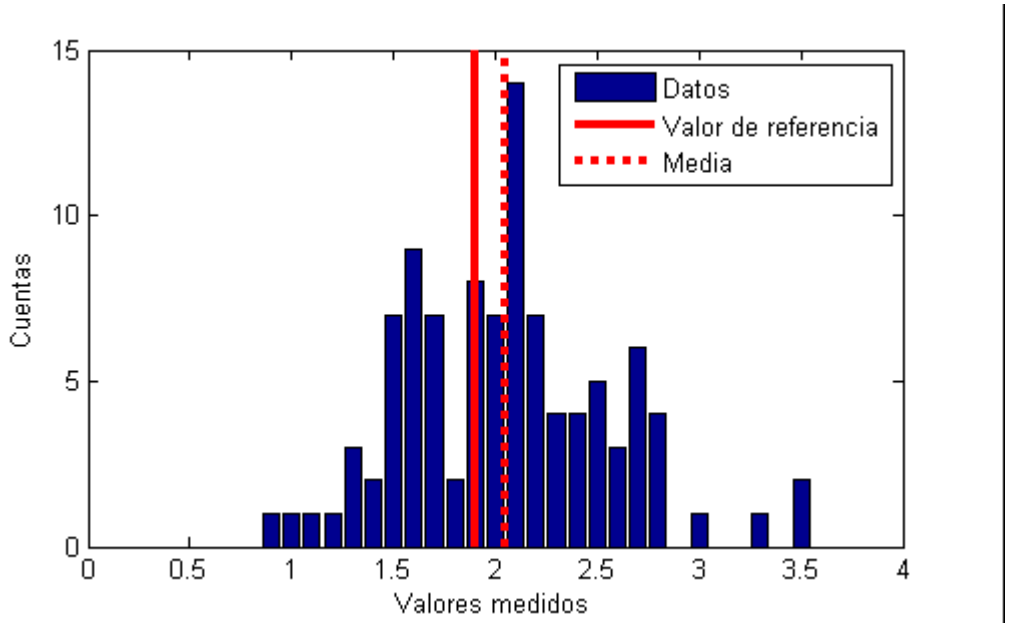
"La droga AUMENTA (o MODIFICA) el tiempo de reacción de las ratas"
ó

"La luz AUMENTA (o MODIFICA) el voltaje medido".

2- Tomar una muestra aleatoria (medir).

Luego medimos:

N: **100**
Media: $\overline{X}$ = **2.049**
Valor de referencia: μ_o= **1.9**
Desvío Estándar: σ **= 0.5 (teórica)**
Error Estándar de la media: SEM = **0.05 (teórica)**



3- Calcular un estadístico basado en la muestra.

El caso más simple sería usar la diferencia entre el valor medido y el valor de referencia:

$$\bar{X} - \mu_o = 2.049 - 1.9 = 0.149$$

En lugar de eso, lo vamos a normalizar (dividir) por el SEM:

Estadístico:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{SEM}$$

Con σ la desviación estándar conocida

$$Z = \frac{2.049 - 1.9}{0.05} = 2.98$$

4- Usar el estadístico y sus propiedades para calcular el p-valor (numéricamente).

Por H_0, supongo que la población tiene una media 0 y desvío estándar 0.5 conocidos. Y que la diferencia que obtuve fue producto del azar.

Armo una muestra aleatoria:

```
>>  N=100;      SD=0.5;
   PRUEBA=randn(N,1)*SD;
   [mean(PRUEBA) std(PRUEBA) sem(PRUEBA) mean(PRUEBA)/sem(PRUEBA)]
ans =      0.0796     0.4744     0.0474     1.6786
```

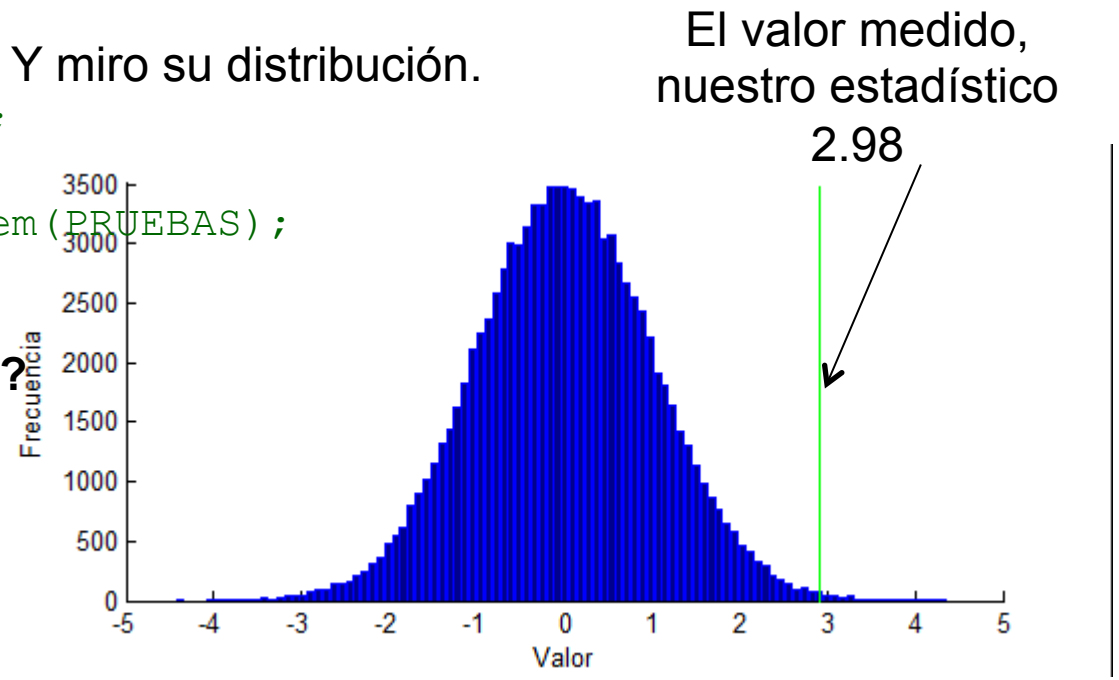
Notar que no es exactamente 0.

Armo **muchas** muestras aleatorias. Y miro su distribución.

```
>> PRUEBAS=randn(N,100000)*SD;
   m_PRUEBAS=mean(PRUEBAS);
   z_PRUEBAS=mean(PRUEBAS)./sem(PRUEBAS);
   hist(z_PRUEBAS,100)
```

¿Qué ancho tiene esta distribución?

```
>> std(m_PRUEBAS)
ans =     1.0113
```



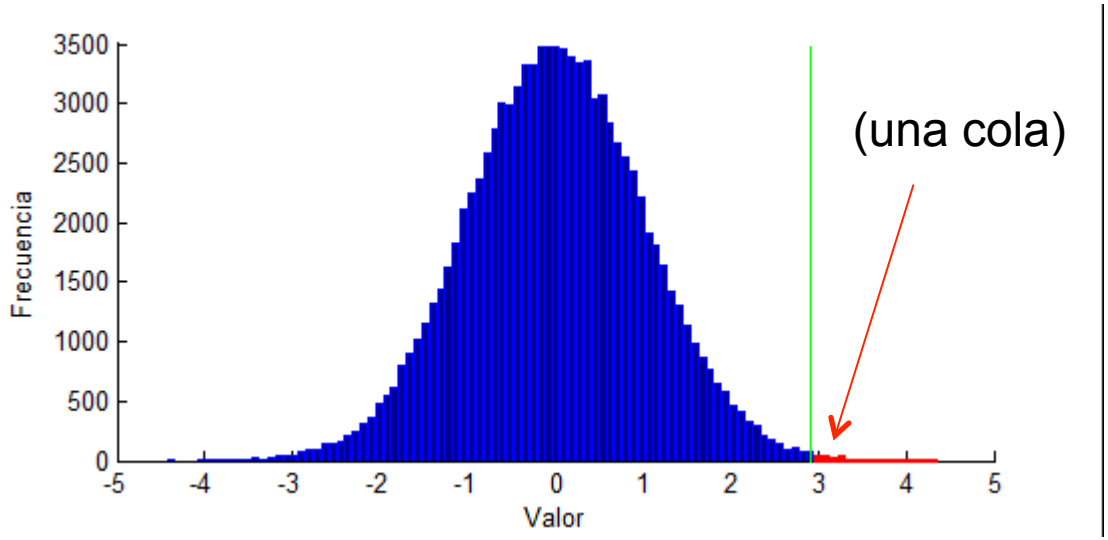
4- Usar el estadístico y sus propiedades para calcular el p-valor.

La probabilidad de obtener EXACTAMENTE ese valor es cero.

Puedo cuantificar la probabilidad de obtener un valor así **o mayor**:

```
mean( z_PRUEBAS > 2.98 )
ans =
    0.0014
```

p=0.0014



4- Usar el estadístico y sus propiedades para calcular el p-valor.

La probabilidad de obtener EXACTAMENTE ese valor es cero.

Puedo cuantificar la probabilidad de obtener un valor así **o mayor**:

```
mean( z_PRUEBAS > 2.98 )
ans =
    0.0014
```

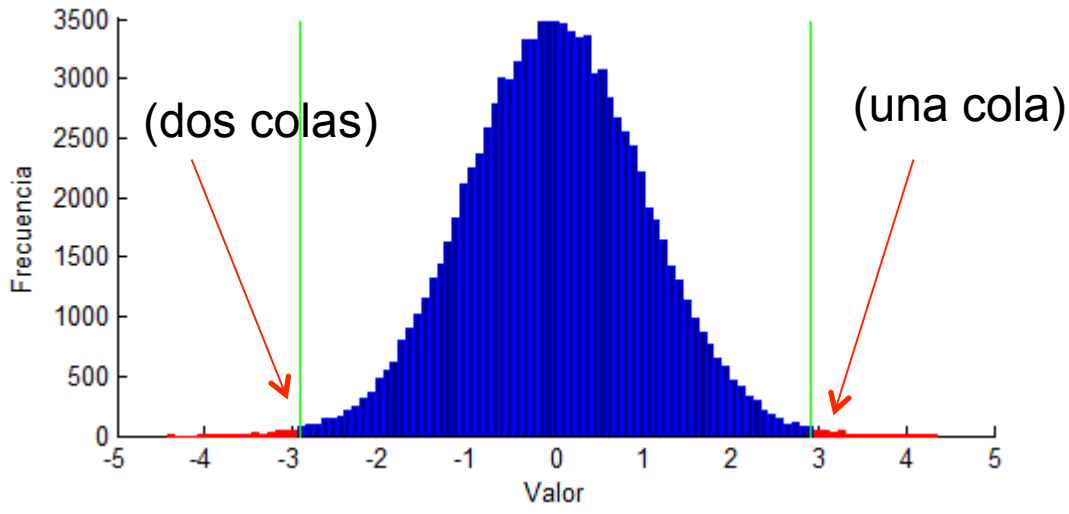
p=0.0014

O así de **extremo** para los dos lados:

```
mean( z_PRUEBAS > 2.98 )+mean( z_PRUEBAS < -2.98 )
ans =
    0.0028
```

p=0.0028

¿Usamos una o dos colas? Depende de la hipótesis $\mathbf{H_1}$. Si queremos probar si aumenta o si cambia para cualquier lado.



¿Y que es p?

Es la probabilidad de obtener un valor tan extremo como el medido, asumiendo la H_0.

En otras palabras, es la probabilidad de equivocarnos al **rechazar** la H_0 (y aceptar H_1) teniendo en cuenta lo medido.

Aquí, bajo es bueno. Pero, ¿bajo comparado con qué?

5- Elegir un umbral (criterio) para tomar una decisión sobre la significancia.

Se elige un **criterio**, un umbral de significancia α (arbitrario).
Y si $p<\alpha$ decimos que el resultado es **"estadísticamente significativo"**.

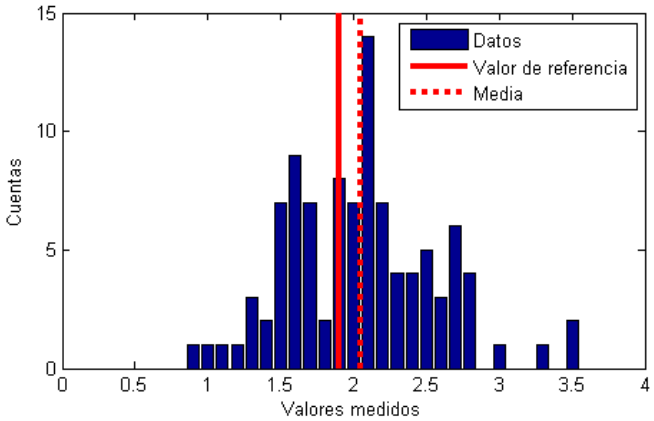
Convencionalmente se usa $\alpha = 0.05 = 5\% = 1/20$.
"Si hiciera el mismo experimento 100 veces, toleraría equivocarme en 5."

En nuestro experimento:

0.0014<0.05 → **2.049** es significativamente **mayor** que **1.9**.

0.0028<0.05 → **2.049** es significativamente **distinto** de **1.9**.

CONCLUSIÓN: Acepamos H_1.
"La droga AUMENTA (o MODIFICA) el tiempo de reacción de las ratas" ó
"La luz AUMENTA (o MODIFICA) el voltaje medido".



OTRO EJEMPLO: T-test:

Es parecido a lo que hicimos, un poco distinto:

-H_0: Los datos vienen de una distribución normal con media 0 y **desvío desconocido**.
-H_1: La media no es 0.
-El estadístico es t-stat=(media-refval)/SEM (**con σ medida**)
-Sus propiedades son distintas (**tiene distribución t de Student**, de ahí el nombre del test).
(en lugar de distribución normal)

```
>> [h p ci s]=ttest(data-1.9)

h =
     1
```

h es 0 o 1, p<α (dos colas y α=0.05 por defecto), acepto o rechazo, hay o no diferencias significativas

```
p =
    0.0044
```

p-valor, la probabilidad de obtener un valor así de extremo

```
ci =
    1.9479
    2.1520
```

El **intervalo de confianza** 95% para la media (¿agarra o no 1.9?)

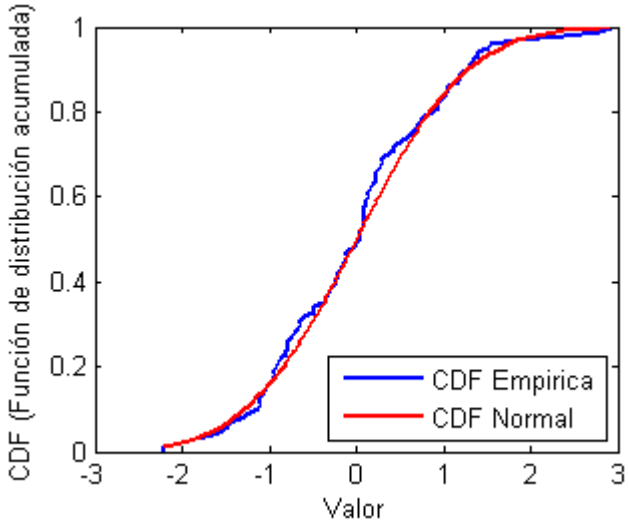
```
s =
    tstat: 2.9148
       df: 99
       sd: 0.5144
```

tstat: el estadístico del t-test
df: grados de libertad
sd: desvío estandar

EJEMPLO 2:

Normalidad: Kolmogorov-Smirnov

-H_0: Los datos vienen de una distribución normal.
-H_1: Los datos NO vienen de una distribución normal.



Calcula la CDF y la compara con la teórica. Calcula la probabilidad de obtener una distribución así, suponiendo Normalidad.

```
>> [h p ksstat cv]=kstest(x)
h =
     0
```

No tengo evidencias para rechazar H_0

```
p =
    0.6064
```

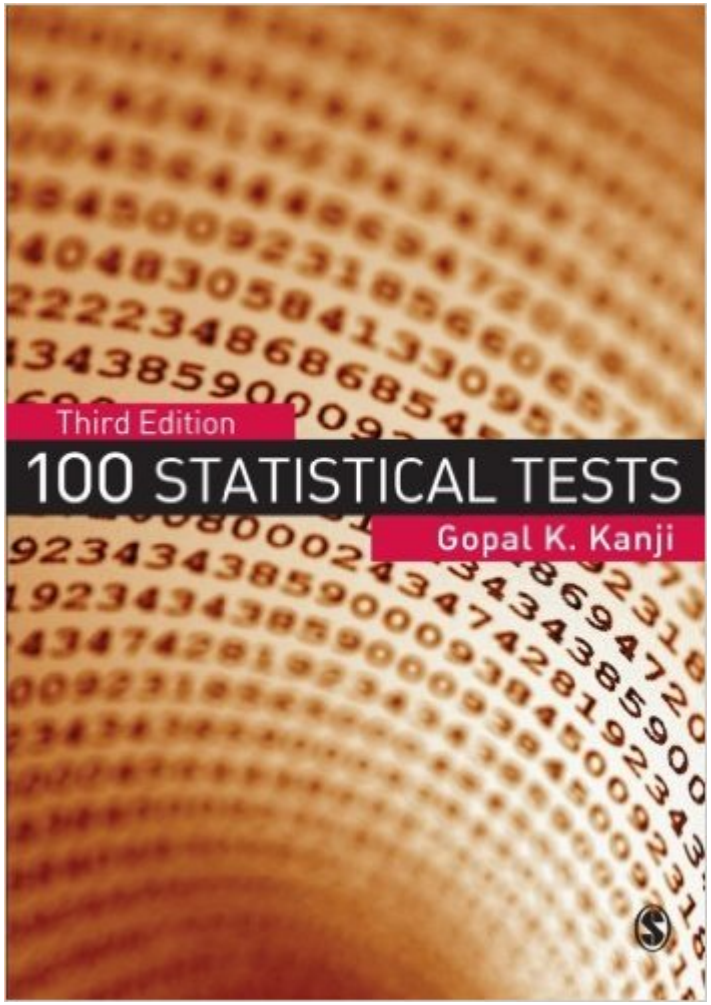
La probabilidad de equivocarme al rechazar H_0 es alta.

```
ksstat =
    0.0746
```

El estadístico.

```
cv =
    0.1340
```

El cutoff value del estadístico, para determinar significancia.



Test 1 *Z*-test for a population mean (variance known)

Object

To investigate the significance of the difference between an assumed population mean μ_0 and a sample mean $\bar{x}$.

Limitations

1. It is necessary that the population variance σ^2 is known. (If σ^2 is not known, see the t-test for a population mean (Test 7).)
2. The test is accurate if the population is normally distributed. If the population is not normal, the test will still give an approximate guide.

Method

From a population with assumed mean μ_0 and known variance σ^2, a random sample of size n is taken and the sample mean $\bar{x}$ calculated. The test statistic

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

may be compared with the standard normal distribution using either a one- or two-tailed test, with critical region of size α.

Example

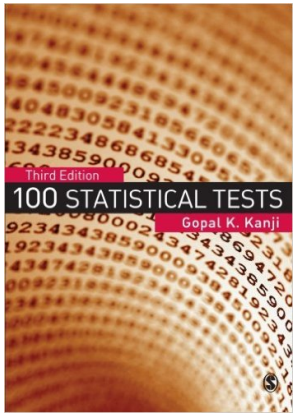
For a particular range of cosmetics a filling process is set to fill tubs of face powder with 4 gm on average and standard deviation 1 gm. A quality inspector takes a random sample of nine tubs and weighs the powder in each. The average weight of powder is 4.6 gm. What can be said about the filling process?

A two-tailed test is used if we are concerned about over- and under-filling.

In this $Z = 1.8$ and our acceptance range is $-1.96 < Z < 1.96$, so we do not reject the null hypothesis. That is, there is no reason to suggest, for this sample, that the filling process is not running on target.

On the other hand if we are only concerned about over-filling of the cosmetic then a one-tailed test is appropriate. The acceptance region is now $Z < 1.645$. Notice that we have fixed our probability, which determines our acceptance or rejection of the null hypothesis, at 0.05 (or 10 per cent) whether the test is one- or two-tailed. So now we reject the null hypothesis and can reasonably suspect that we are over-filling the tubs with cosmetic.

Quality control inspectors would normally take regular small samples to detect the departure of a process from its target, but the basis of this process is essentially that suggested above.



Test 1 *Z*-test for a population mean (variance known)

Object

To investigate the significance of the difference between an assumed population mean μ_0 and a sample mean $\bar{x}$.

Test 7 *t*-test for a population mean (variance unknown)

Object

To investigate the significance of the difference between an assumed population mean μ_0 and a sample mean $\bar{x}$.

Test 35 The Kolmogorov–Smirnov test for goodness of fit

Object

To investigate the significance of the difference between an observed distribution and a specified population distribution.

Hay muchos tests, para preguntarles distintas cosas a los datos:
-Tipos de datos
-Tipos de preguntas

	Type of data		
Goal	**Measurement (from Gaussian Population)**	**Rank, Score, or Measurement (from Non- Gaussian Population)**	**Binomial (Two Possible Outcomes)**
Describe one group	Mean, SD	Median, interquartile range	Proportion
Compare one group to a hypothetical value	One-sample t test	Wilcoxon test	Chi-square or Binomial test **
Compare two unpaired groups	Unpaired t test	Mann-Whitney test	Fisher's test (chi-square for large samples)
Compare two paired groups	Paired t test	Wilcoxon test	McNemar's test
Compare three or more unmatched groups	One-way ANOVA	Kruskal-Wallis test	Chi-square test
Compare three or more matched groups	Repeated-measures ANOVA	Friedman test	Cochrane Q**
Quantify association between two variables	Pearson correlation	Spearman correlation	Contingency coefficients**
Predict value from another measured variable	Simple linear regression or Nonlinear regression	Nonparametric regression**	Simple logistic regression*
Predict value from several measured or binomial variables	Multiple linear regression* or Multiple nonlinear regression**		Multiple logistic regression*

http://www.graphpad.com/support/faqid/1790/