Mecánica Clásica - Clase 2

15 de agosto de 2012

1. Guía 1: Repaso de F1

1.1. Problema 25

Tenemos un problema en $1D$ con infintas partículas puntuales, todas de masa m, dispuestas en un arreglo muy particular: la partícula n-ésima está ubicada en $x_n = 1/2^{n-1}, n \in \mathbb{N}$ (¿les suena la paradoja de Aquiles?). A tiempo $t = 0$ la partícula 1 parte con velocidad $v_1 = -1$ hacia las demás. Se produce luego una serie de choques perfectamente elásticos.

Como todas las partículas tienen la misma masa, siempre sucede que la que luego del choque la que viene moviéndose se queda quieta en el lugar de la otra, que se empieza a mover, siempre con $v = -1$ hasta chocar a la siguiente, y así sucesivamente. Entonces podemos decir que la partícula n-ésima se moverá entre las posiciones $1/2^{n-1}$ y $1/2^n$ para luego quedar en reposo. Además, este movimiento sucede entre los tiempos

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = 1/2^{n-1} - 1/2^n = 1/2^n \tag{1}$$

La suma de todos estos tiempos es la serie geométrica (convergente)

$$\sum_{\infty}^{n=1} 1/2^n = 1 \tag{2}$$

por lo que se puede decir que esta serie infinita de choques termina en $t = 1$. ¿Cuál es el estado final del sistema?. El razonamiento anterior lo hicimos para una partícula en general, y llegamos a la conclusión de que después del choque queda en reposo. Si todos los choques suceden entre $t = 0$ y $t = 1$, ¿eso significa que para $t > 1$ el sistema está en reposo?. Pero entonces, ¿qu pasó con la energía cinética que teníamos al principio? ¿Se les ocurre alguna otra manera de pensar los choques que sirva para pensar de otra manera el problema?

2. Guía 2: Principio de D'Alambert (Trabajos Virtuales)

2.1. Repaso

Todos conocemos la ley de Newton: $\vec{F}_i = m\vec{a}_i \Rightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$, donde en $\vec{F}$ incluímos fuerzas externas y de vínculo (ligaduras). D'Alambert propone que, si se considera al sistema en su totalidad, hay un elemento que distingue estos dos tipos de fuerzas: en un movimiento compatible con los vínculos del sistema el trabajo total de las fuerzas de ligadura $\vec{f}_i$ se anula. Esto quiere decir que

$$\sum_i \vec{f}_i . \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3}$$

Se deduce entonces el principio de D'Alambert

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) . \delta\vec{r}_i = 0 \tag{4}$$

donde en $\vec{F}$ **ya no incluímos a las fuerzas de vínculo.** A los fines prácticos esto es lo importante. Esta bueno aclarar que, así escritos, los δr_i no son independientes entre sí. Sin embargo, si los escribimos en función de lo que llamamos *coordenadas generalizadas* (tantas como grados de libertad efectivos tenga el sistema), estos sí serán independientes y, por lo tanto, podremos utilizar la fórmula anterior para resolver un problema real. Eso es lo que hago en lo que viene.

2.2. Problema 5

Vamos a resolver el movimiento de las dos masitas figura 1 usando el ppio de D'Alambert.

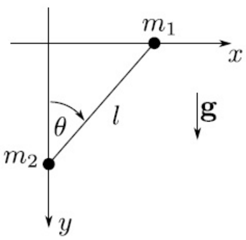

Figura 1:

Escribiendo entonces la ecuación (**??**), y recordando que no hay que poner las fuerzas de vínculo, tenemos (llamé sin querer masa 1 a la 2 y 2 a la 1, tengan cuidado)

$$(m_1 g\hat{y} - m_1\vec{a}_1).(\delta x_1\hat{x} + \delta y_1\hat{y}) + (m_2 g\hat{y} - m_2\vec{a}_2).(\delta x_2\hat{x} + \delta y_2\hat{y}) = 0 \tag{5}$$

Imponiendo las restricciones del problema queda

$$(m_1 g - m_1\ddot{y}_1).\delta y_1 - m_2\ddot{x}_1.\delta x_2 = 0 \tag{6}$$

Todavía no podemos hacer mucho, porque los desplazamientos no son independientes. Lo que pasa es que el sistema en realidad tiene un sólo grado de libertad. Podemos elegir como coordenada generalizada el ángulo θ de manera tal que $x_2 = lsen(\theta)$ e $y_1 = lcos(\theta)$. En ese caso, $\delta x_2 = lcos(\theta)\delta\theta$ y $\delta y_1 = -lsen(\theta)\delta\theta$. Utilizando estas relaciones y las de las derivadas con respecto al tiempo lo que queda es (y dividiendo por l^2)

$$-m_1(g/l + sen(\theta)\ddot{\theta} + cos(\theta)\dot{\theta}^2).(sen(\theta)\delta\theta) + m_2(sen(\theta)\dot{\theta}^2 - cos(\theta)\ddot{\theta}).(cos(\theta)\delta\theta) = 0 \tag{7}$$

Ahora sí podemos decir que, si hay un dezplazamiento, $\delta\theta \neq 0$ por lo que todo el resto debe anularse. Se obtiene entonces la ecuación de movimiento del problema. Si $m_1 = m_2$ queda exactamente la ecuación de un péndulo. En el problema también nos piden que calculemos la tensión en ese caso: para poder hacerlo hay que volver indefectiblemente al formalismo de Newton. No hay otra manera, porque en el tratamiento asumimos que las normales o tensiones valen *lo que tienen que valer* para sacárlas de las ecuaciones y simplificar todo, pero si lo que buscamos son los valores de estas fuerzas hay que volver a Newton.