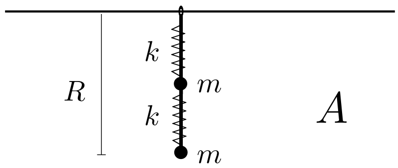
Primer parcial de Mecánica Clásica. Primer Cuatrimestre, 2003

1. Una barra rígida de masa nula y longitud R puede moverse libremente (no necesariamente en un plano) sobre uno de sus extremos. Este extremo se encuentra enhebrado en un riel a lo largo del cual puede desplazarse sin rozamiento. Una masa m está fija al extremo de dicha barra, y otra masa m está unida mediante resortes a ambos extremos, como se puede ver en la figura A. Ambos resortes tienen constante elástica k y longitud natural nula. Hay gravedad.

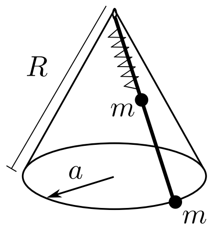
(a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
(b) Escriba el lagrangiano del sistema en coordenadas generalizadas apropiadas.
(c) Identifique las magnitudes conservadas. Justifique considerando las simetrías del sistema.

Ahora la misma barra puede moverse sobre la superficie de un cono cuya base tiene radio a, como se muestra en la figura B. El resorte inferior fue retirado de la barra. Hay gravedad.

(d) Escriba las ecuaciones de movimiento.
(e) Utilizando el formalismo del potencial efectivo, halle la condición que debe satisfacer una órbita circular de la masa superior. Grafique cualitativamente el potencial efectivo y clasifique las órbitas posibles.



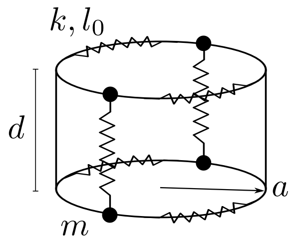
A



B

2. Considere un cilindro de radio a y altura d. Sobre cada borde del cilindro se encuentran enhebradas dos masas, cada una con masa m, que pueden moverse libremente por el borde bajo la acción de los resortes. Los resortes verticales se encuentran sobre la superficie del cilindro y no pueden atravesarlo. Todos los resortes tienen constante elástica k y longitud natural l_0 ($d = 2l_0$ y $a = l_0/\pi$).

(a) Escriba el lagrangiano del sistema en coordenadas generalizadas apropiadas e indique la posición de equilibrio del sistema.
(b) En la aproximación de pequeñas oscilaciones, escriba el lagrangiano y las matrices de masa y potencial.
(c) Encuentre los modos normales y las frecuencias correspondientes de oscilación. Justifique.
(d) Para cada modo normal, proponga un conjunto de condiciones iniciales que excite solamente ese modo.
(e) ¿Cuáles de los modos normales hallados seguirán siendo válidos aún para grandes apartamientos del equilibrio? Justifique.



3. Una partícula de masa m se encuentra bajo la acción de un potencial central $V(r) = -k\frac{e^{-\alpha r}}{r}$, donde k y α son constantes positivas.

(a) Escriba el lagrangiano del sistema y encuentre las constantes de movimiento.
(b) Encuentre la condición para órbitas circulares. Verifique que para el caso $\alpha = 0$ obtiene el resultado esperado (¿qué espera obtener?).
(c) Encuentre el período de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de la órbita circular. Calcule el resultado cuando $\alpha = 0$.