Mecánica Clásica.

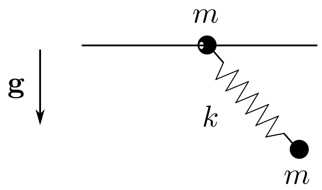
Primer parcial – 2do. cuatrimestre 2005 – 13/10/2005

Justifique todas sus afirmaciones.

Problema 1

Dos partículas de masa m están unidas por un resorte de constante elástica k. Una de ellas sólo puede moverse engarzada a un eje horizontal sin rozamiento, como muestra la figura. Suponga gravedad y movimiento restringido a un plano vertical.

1. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Escriba el Lagrangiano con coordenadas apropiadas. ¿Qué magnitudes se conservan?
2. Obtenga las ecuaciones de movimiento del sistema.
3. Reemplace el resorte por un hilo de longitud l. Reescriba el Lagrangiano y halle la frecuencia de oscilación del sistema para ángulos pequeños. Suponga condiciones iniciales adecuadas.



Problema 2

Se sabe que el Lagrangiano de cierto sistema físico compuesto por dos partículas es invariante ante las siguientes transformaciones de coordenadas:

– traslaciones rígidas en la dirección $\hat{x}$

$$- \begin{cases} x_1 \longrightarrow x_1' = x_1 + \epsilon_1 y_1 + \epsilon_2 y_2 \\ x_2 \longrightarrow x_2' = x_2 + \epsilon_1 y_2 + \epsilon_2 y_1 \end{cases}$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son dos parámetros arbitrarios e independientes, x_i e y_i $(i = 1, 2)$ son las coordenadas cartesianas de cada una de las partículas.

1. Encuentre las constantes de movimiento asociadas a la invariancia del Lagrangiano.
2. Considere $\epsilon_1 = \epsilon_2$
   (a) ¿Cuáles son ahora las constantes de movimiento?
   (b) Suponga que luego de resolver las ecuaciones de Euler–Lagrange se obtiene que $y_1 = \sin \omega t$. Describa cualitativamente los movimientos posibles.

Problema 3

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas central derivable de un potencial $V(r) = kr^4$ $(k > 0)$.

1. Encuentre la energía y el momento angular para los cuales la partícula describe una órbita circular de radio a alrededor del centro de coordenadas. Calcule el período de la órbita circular.
2. Demuestre que si la partícula es desplazada levemente de la órbita circular el movimiento es estable. Calcule el período para pequeñas oscilaciones radiales alrededor de $r = a$.
3. Grafique cualitativamente la órbita obtenida en el ítem anterior. ¿Es una trayectoria cerrada?

Problema 4

Suponga que sostiene una tiza sobre la punta de su dedo índice (hay gravedad). Suponga que quiere mantener la tiza “en equilibrio” haciendo que la punta de su dedo describa una trayectoria circular de radio R con una frecuencia angular ω alrededor del eje vertical $\hat{z}$. Considere que la tiza es un cilindro circular recto de masa m y largo $2l$; el momento principal de inercia alrededor de un eje transversal a la tiza que pasa por su centro de masa es I. Por simplicidad, suponga que la tiza sólo puede caer hacia el eje $\hat{z}$ (ver figura), y que la tiza no puede rotar alrededor de su eje de revolución.

1. Obtenga la ecuación de movimiento para el único grado de liberta del sistema.
2. Demuestre (*no calcule*) que hay un punto de equilibrio para cualquier elección de R, m, l, $\omega \neq 0$.
3. Ahora considere $g = 0$. ¿Cuáles son las condiciones para que existan tres puntos de equilibrio? Calcúlelos y determine su estabilidad (tome como dato que uno es estable y dos son inestables).