Primer Parcial de Mecánica Clásica – 2do. c. de 2008

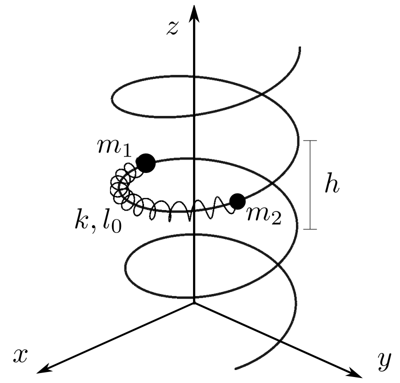
P1. (2.5 puntos) Dada la helicoide de radio a y paso $z = \frac{h}{2\pi}$ se enhebran dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de constante elástica k_0 y longitud natural l_0, que también está enhebrado en el helicoide. **No hay gravedad**. Determinar:

a) Grados de libertad del sistema y su lagrangiano en coordenadas generalizadas apropiadas.

b) Ecuaciones de movimiento.

c) Dadas las transformaciones: $\theta_1 \longrightarrow \theta_1 + \epsilon$; $\theta_2 \longrightarrow \theta_2 + \epsilon$. Establezca si es una operación de simetría y en caso afirmativo exprese la magnitud conservada asociada a esta simetría. ¿Hay otras magnitudes conservadas? Justifique. (θ_i es el ángulo polar de la partícula i.)

d) Suponga ahora que existe gravedad, pruebe que la transformación del punto c) deja de ser una simetría del Lagrangiano correspondiente.



P2. (2 puntos) Una partícula de masa m en una dimensión está sujeta a un potencial anharmónico dado por $V(x) = \frac{k}{2}x^2 - \beta x^4$, con k y β constantes positivas.

a) Proponiendo una solución de la forma $x(t) = A\sin(\omega t)$ entre los tiempos $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ use el principio variacional de Hamilton y encuentre una expresión aproximada para la relación entre la amplitud A y la frecuencia ω. De esta relación despeje ω en función de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, A, β y m. *Ayuda*: $\int_0^\tau \sin(\omega t)^2 dt = \frac{\tau}{2}$, $\int_0^\tau \sin(\omega t)^4 dt = \frac{3\tau}{8}$.

b) Aplique su solución al problema de un péndulo simple de longitud l, masa M en un campo gravitatorio g y verifique la siguiente dependencia $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}$. *Ayuda*: $V(\theta) \sim \frac{Mgl}{2}\theta^2 - \frac{Mgl}{24}\theta^4$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Si la amplitud $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ esta solución da: $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.928936$ mientras que con la solución exacta se tiene $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.931808$.

P3. (2.5 puntos) Una partícula de masa m está sujeta a un potencial central dado por $V(r) = -\frac{k}{r^4}$, con k constante positiva.

a) Encuentre las condiciones para la existencia de órbitas circulares y estudie la estabilidad de las órbitas circulares resultantes.

b) Para el caso de órbita circular, hallar la relación entre el período de la órbita y su radio.

c) Si la partícula viene desde el infinito con velocidad inicial v_0 y momento angular L. ¿Cuál es el menor valor del momento angular para el cual esta partícula incidente desde muy lejos no caiga al centro de fuerzas? Calcule el mayor valor del parámetro de impacto b para el cual la partícula cae al centro de fuerzas ($L = mv_0 b$).

d) Describa cualitativamente cómo son las órbitas para distintos niveles de energía y momento angular no nulo.

P4. (3 puntos) En el sistema de la figura, dos masas iguales, de valor m están enhebradas en una varilla horizontal y están unidas con un resorte de longitud natural l_0 y constante k. Unida a estas masas mediante resortes de longitud natural nula y constante k se halla otra masa M. Considere que hay gravedad y que el movimiento de la masa M está en el plano de la figura.

a) Escriba la energía potencial del sistema con un conjunto de coordenadas generalizadas apropiadas. Determine la(s) posición(es) de equilibrio del sistema. *Ayuda*: puede usar coordenadas cartesianas.

b) Reescriba el lagrangiano en la aproximación de pequeños apartamientos del equilibrio y escriba explícitamente las matrices potencial y de masa.

c) Encuentre los modos normales y las frecuencias correspondientes justificando claramente. *Ayuda:* Proponga un conjunto razonable de modos normales y verifíquelos usando la ecuación de autovectores.

d) Determine a priori dos coordenadas normales (no necesita hacer cuentas).