Mecánica Clásica - Ejercicio de Fuerzas Centrales del parcial que hicimos en clase

22 de septiembre de 2012

1. Problema 3

Se tiene una partícula sometida a un potencial central $V(r) = -k/r^4$ atractivo ($k > 0$).

1. Analizar la existencia y estabilidad de órbitas circulares.
2. Hallar la relación entre el período de la órbita y el radio de la órbita circular (r_c y τ_c).
3. Si la partícula viene desde el infinito con velocidad inicial v_0 y momento angular l, encuentre el menor valor del momento angular para el cual esta partícula incidente desde muy lejos NO cae al centro de fuerzas. Calcule el mayor valor del parámetro de impacto b para el cual la partícula cae al centro de fuerzas ($L = mv_0b$).
4. Describa cualitativamente cómo son las órbitas para distintos niveles de energa y momento angular no nulo.

El lagrangiano de este problema no presenta dificultades. Tenemos

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + k/r^4 \tag{1}$$

donde, cómo siempre, θ es cíclica y podemos sacar la consevación del momento angular $l = mr^2\dot{\theta} = cte$. La otra ecuación de Euler-Lagrange da la conservación de la energía que, reemplazando el valor de l, se escribe

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^4} \tag{2}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^4} \tag{3}$$

Para estudiar la existencia de órbitas circulares igualamos la derivada del potencial a cero. A partir de ahora, $V \equiv V_{eff}$.

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5} \tag{4}$$

por lo que tenemos un radio circular en $r_c^2 = \frac{4km}{l^2}$. La energía asociadad a esta órbita para un momento angular dado se calcula a partir de la ecuación (2) tomando $r = r_c$ y $\dot{r} = 0$. Tenemos entonces $E_c = \frac{l^2}{2mr_c^2} - \frac{k}{r_c^4} = \frac{l^4}{16m^2k}$ Para ver si la órbita es estable, basta con calcular la derivada segunda del potenical efectivo y evaluarlar en r_c.

$$\frac{d^2V}{dr^2}(r_c) = \frac{3l^2}{mr_c^4} - \frac{20k}{r_c^6} > 0 \tag{5}$$

Encontramos entonces que la órbita circular es inestable, por lo que no se puede, por ejemplo, hacer pequeñas oscilaciones alrededor de r_c. Esto era esperable si se tiene en cuenta que el gráfico del potencial efectivo es similar al gráfico del potencial efectivo del problema de Keppler cambiado de signo: por un lado, $V(r \to \infty) \to 0$, y por otro, $V(r \to 0) \to -\infty$ pues cerca del origen el potencial real le gana a la barrera centrífuga, por lo que como extremo local sólo tenemos un máximo en r_c.

El período de la órbita circular es fácil de encontrar a partir de la ecuación para l:

$$\tau_c = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi \frac{mr_c^2}{l^2} \tag{6}$$

El tercer punto del problema es un poco más interesante. Recién dijimos que en este caso no tenemos una barrera centrífuga, lo cual implica la posibilidad de que la partícula en cuestión *caiga* hasta el centro de fuerzas. Si inicialmente la partícula incide desde el infinito, su energía viene dada exclusivamente por el t'ermino que involucra la velocidad en $\hat{r}$: $E = (1/2)mv_0$. Sin embargo, no podemos olvidarnos de que viene con un momento angular que se conservará a lo largo de todo el movimiento que suponemos distinto de cero (ya vimos en otro ejemplo que, por más que el momento $l \to \infty$ al acercarse al origen la masa puede llegar hasta $r = 0$ en un tiempo finito). Se define entonces, como en la guía de *scattering* el parámetro de impacto b de manera tal que $l = mv_0 b$ (es un buen ejercicio hacer esa cuenta, se las dejo). Para que la masa no caiga al centro de fuerzas pedimos que haya algún punto de retorno, es decir que queremos una energía tal que la recta horizontal que la marcaría en el gráfico de V_{eff} se *choque* con el gráfico del potenciall. En otras palabras, lo que hay que pedir es que, para un l dado, $E < E_c$. Esto es

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \quad < \quad \frac{l^4}{16m^2k} \tag{7}$$

$$l = mv_0 b \quad > \quad \left[8m^3 v_0^2 k\right]^{1/4} \tag{8}$$

El último punto del problema nos pide una descripción de los distintos movimientos posibles según el valor de la energía mecánica. Los tres casos posibles son

1. $E = E_c$: órbita circular.
2. $E < E_c$: Si la partícula se acerca desde muy lejos, hay un r_{min} y una órbita de tipo parabólica (no ligada).
3. $E > E_c$: La partícula cae hacia el centro de fuerzas mientras la velocidad de rotación se hace cada vez más grande.