P3. Una partícula está sujeta a un potencial central $V(r) = -\alpha\,[\exp(a_0/r) - 1]$, con α y a_0 positivas.

a) Exprese el Lagrangiano en coordenadas apropiadas. Dé una expresión de las magnitudes conservadas, justifique.

b) Encuentre la ecuación que satisface el radio de las órbitas circulares con $r = a$.

c) Pruebe que las órbitas circulares son estables si $a > a_0$ e inestables si $a < a_0$.

d) En el caso de órbitas circulares estables halle la frecuencia de oscilación radial para pequeños apartamientos de la órbita circular. ¿Qué relación debe satisfacer el cociente a_0/a para que la órbita perturbada sea cerrada?

Solución

Como el potencial no depende de las coordenadas angulares, el momento angular total se conserva. El movimiento se da entonces en un plano, digamos $z = 0$. Podemos asegurar que el problema tiene entonces dos grados de libertad, que podemos describir con coordenadas polares $\{$r,$\theta\}$

En polares, la energía cinética es

$$T(r, \theta, \dot{r}) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

Entonces, el lagrangiano,

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot{\theta}^2 + \alpha\left(\exp\left(\frac{a_o}{r}\right) - 1\right) \tag{2}$$

Pero, como dijimos, se conserva el momento angular l. Como θ es una coordenada cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,r^2\,\dot{\theta} = cte \equiv l \tag{3}$$

Podemos escribir a partir 3 a $\dot{\theta}$ como función de r,

$$\dot{\theta} = \frac{l}{m\,r^2} \tag{4}$$

y con esto en 1 podemos pasar a un problema unidimensional equivalente:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\,m\,r^2} \tag{5}$$

Así, el lagrangiano resulta

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\,m\,r^2} + \alpha\left(\exp\left(\frac{a_o}{r}\right) - 1\right) \tag{6}$$

El lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, y por lo tanto el hamiltoniano se conserva. Además, como T es cuadrática en las velocidades y el potencial es independiente de éstas, el hamiltoniano coincide con la energía:

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, m\, \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\, m\, r^2} - \alpha \left(\exp\left(\frac{a_o}{r}\right) - 1 \right) \tag{7}$$

Vemos que la energía escrita en término de la coordenada radial se puede pensar como compuesta por un término cinético y un potencial efectivo:

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2\, m\, r^2} - \alpha \left(\exp\left(\frac{a_o}{r}\right) - 1 \right) \tag{8}$$

El radio de la órbita circular es aquel en que el potencial efectivo toma su mínimo (o máximo) valor. Es decir, si $r = a$ es el radio de la órbita circular, se satisface

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right|_{r=a} \\ &= \left.\left[-\frac{l^2}{m\, r^3} - \alpha \exp\left(\frac{a_o}{r}\right) \left(-\frac{a_o}{r^2}\right) \right]\right|_{r=a} \\ &= \frac{1}{a^3}\left[-\frac{l^2}{m} + \alpha \exp\left(\frac{a_o}{a}\right) a_o\, a \right] \end{aligned} \tag{9}$$

Y entonces encontramos que el radio de la órbita circular es tal que

$$\frac{l^2}{m} = \alpha\, a_o\, a\, \exp\left(\frac{a_o}{a}\right) \tag{10}$$

Para determinar la estabilidad de la órbita circular, nos fijamos en la derivada segunda del potencial efectivo:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r=a} &> 0 \quad \rightarrow \text{órbita estable} \\ \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r=a} &< 0 \quad \rightarrow \text{órbita inestable} \end{aligned}$$

Derivamos entonces la expresión 9, obteniendo:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r=a} &= \left.\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right) \right]\right|_{r=a} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{l^2}{m\, r^3} + \alpha\, a_o \exp\left(\frac{a_o}{r}\right) \frac{1}{r^2} \right]\right|_{r=a} \\ &= \left.\left[3\frac{l^2}{m\, r^4} + \alpha\, a_o \exp\left(\frac{a_o}{r}\right) \left(-\frac{a_o}{r^2}\,\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) \right]\right|_{r=a} \\ &= \left(\frac{1}{a^4}\right)\left[3\frac{l^2}{m} - \alpha\, a_o \exp\left(\frac{a_o}{r}\right)(a_o + 2a) \right] \end{aligned} \tag{11}$$

Pero para la órbita circular vale 10 y entonces resulta:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r=a} &= \left(\frac{1}{a^4}\right)\left[3\alpha\, a_o\, a\, \exp\left(\frac{a_o}{a}\right) - \alpha\, a_o \exp\left(\frac{a_o}{r}\right)(a_o + 2a) \right] \\ &= \left(\frac{1}{a^4}\right) \exp\left(\frac{a_o}{a}\right) \alpha\, a_o\, [\, a - a_o] \end{aligned} \tag{12}$$

Y entonces, por lo que afirmamos anteriormente, la condición de estabilidad es

$$
\begin{aligned}
a > a_o \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r=a} &> 0 \quad \Rightarrow \text{órbita estable} \\
a < a_o \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r=a} &< 0 \quad \Rightarrow \text{órbita inestable}
\end{aligned}
$$

Para pequeños apartamientos de la órbita circular, podemos escribir

$$r = a + \delta r \;\; / \;\; \frac{\delta r}{a} \ll 1 \tag{13}$$

y la derivada temporal es entonces

$$\dot{r} = \dot{\delta r} \tag{14}$$

Hacemos un desarrollo de Taylor de orden 2 del potencial alrededor de $r = a$:

$$
\begin{aligned}
V(r = a + \delta r) &= V(a) + \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a}}_{=0 \text{ por } 9} (r-a) + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=a} (r-a)^2 + \cdots \\
&\simeq V(a) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=a} \delta r^2
\end{aligned} \tag{15}
$$

Con 14 y 15 en 7, resulta, eliminando el término constante,

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\delta r}^{\,2} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=a} \delta r^2 \tag{16}$$

Comparando la energía con la de un oscilador armónico

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\; x^2 \tag{17}$$

reconocemos que la derivada segunda del potencial puede asociarse con la constante k del oscilador, relacionada con la frecuencia de oscilación radial mediante

$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=a} \overset{(12)}{=} \frac{\alpha\, a_o}{m\, a^4} \exp\left(\frac{a_o}{a}\right) (a - a_o) \tag{18}$$

La condición de estabilidad nos asegura que esta cantidad es positiva.

En cuanto a la frecuencia orbital, es por 4

$$\omega_\theta^2 = \dot{\theta}^2 = \left.\frac{l^2}{m^2\, r^4}\right|_{r=a} \overset{(10)}{=} \alpha\, a_o\, a\, \exp\left(\frac{a_o}{a}\right) \frac{1}{m\, a^4} \tag{19}$$

Dividiendo estas dos últimas expresiones, llegamos a

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_\theta^2} = \frac{(a - a_o)}{a} \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{\frac{a - a_o}{a}} \tag{20}$$

Para que la órbita sea cerrada, este cociente entre las frecuencias debe ser racional:

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{\frac{a - a_o}{a}} \in \mathbb{Q} \tag{21}$$

Por ejemplo, tendríamos órbitas cerradas para $\dfrac{a_o}{a} = \dfrac{7}{4}$, ya que obtendríamos

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{\left(1 - \frac{a_o}{a}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \tag{22}$$