Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2011 – Primer parcial (6/10/2011)

P2. (2 puntos) Considere el movimiento de una partícula de masa m en un campo gravitatorio uniforme (tiro oblicuo). De acuerdo a observaciones la partícula arrojada en forma oblicua alcanza un altitud máxima y vuelve a la superficie recorriendo una distancia horizontal D en un tiempo τ. Proponiendo la siguiente parametrización de las coordenadas:

$$y(t) = y_0 \cos(\alpha t + \beta), \qquad x(t) = x_0 + \gamma t$$

a) Si la partícula parte desde origen, use el principio de mínima acción para encontrar los valores de los parámetros.

b) Resuelva el problema exactamente y compare la altura máxima con la que se obtiene con el método variacional.

c) Calcule la componente vertical de la velocidad inicial para el caso exacto y compárela con la obtenido en forma aproximada.

▪ **Solución.** (a) Las condiciones iniciales y finales permiten fijar varios parámetros. En $t = 0$ la partícula parte desde el origen, de modo que $x_0 = 0$ y $\cos\beta = 0$. Esta segunda ecuación indicaría que β puede tomar (a menos de un número entero de veces 2π) los valores $\pm\pi/2$. Esto equivale a reemplazar la ecuación original por

$$y(t) = y_0 \sin \alpha t.$$

En $t = \tau$ debe ser $\gamma\tau = D$ y $y_0 \sin \alpha\tau = 0$. La primera igualdad implica $\gamma = D/\tau$, y la segunda se satisface siempre que $\alpha\tau = n\pi$, con n entero. En verdad, de todas las posibles trayectorias de la forma $y_0 \sin(n\pi t/\tau)$, sólo en el caso $n = 1$ se obtiene una función que alcance su valor máximo en un sólo punto, asumiendo que y_0 es mayor que cero. En definitiva,

$$x(t) = \frac{Dt}{\tau}, \qquad y(t) = y_0 \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right).$$

La acción para esta familia de trayectorias es

$$S = m \int_0^\tau dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{D}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y_0\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) - g y_0 \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]$$

$$= m\left(\frac{1}{2}\frac{D^2}{\tau} + \frac{y_0^2\pi^2}{4\tau} - \frac{2gy_0\tau}{\pi}\right).$$

El único parámetro que resta fijar es y_0. Pidiendo que se anule la derivada de la acción respecto de y_0 se obtiene

$$\frac{y_0\pi^2}{2\tau} = \frac{2g\tau}{\pi} \qquad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{4g\tau^2}{\pi^3}.$$

■ (b) La trayectoria exacta de la partícula en tiro oblicuo es

$$x(t) = \frac{Dt}{\tau}, \qquad y(t) = \frac{g\tau t}{2} - \frac{gt^2}{2}.$$

La solución aproximada del ítem anterior da el resultado correcto para $x(t)$. La altura máxima alcanzada para la trayectoria real es

$$y_{\max} = y(\tau/2) = \frac{g\tau^2}{8}.$$

En la solución aproximada, el valor máximo de la altura es $y_0 = 4g\tau^2/\pi^3 \approx (4/31)g\tau^2$. (Se ha usado que $\pi^3 \approx 31$.)

■ (c) La velocidad inicial en la dirección vertical de la solución exacta es $v_0 = g\tau/2$. La solución aproximada da una velocidad inicial igual a $\alpha y_0 = 4g\tau/\pi^2 \approx 0.4g\tau$. (Se ha usado que $\pi^2 \approx 10$.)

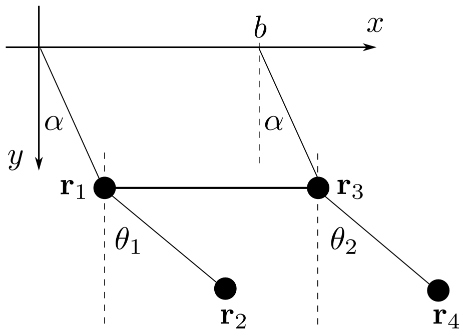
P4. (2.5 puntos) El sistema de la figura está formado por dos péndulos dobles unidos por una barra sin masa. El movimiento de los péndulos está restringido al plano de la figura.

a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.

b) Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio. Exprese las matrices de masa y de potencial.

c) Encuentre un modo normal y su correspondiente frecuencia de oscilación. Verifique y fundamente su respuesta.

■ **Solución.** (a) Hay tres grados de libertad. Un conjunto de posibles coordenadas se muestra en la figura.



Las posiciones de las primeras dos masas son

$$\mathbf{r}_1 = a(\sin\alpha\,\hat{x} + \cos\alpha\,\hat{y})$$

$$\mathbf{r}_2 = a(\sin\alpha + \sin\theta_1)\,\hat{x} + a(\cos\alpha + \cos\theta_1)\,\hat{y}.$$

Las posiciones del otro par de masas son

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + b\,\hat{x}, \qquad \mathbf{r}_4 = a(\sin\alpha + \sin\theta_2)\,\hat{x} + a(\cos\alpha + \cos\theta_2)\,\hat{y} + b\,\hat{x}.$$

Los módulos de las velocidades al cuadrado se calculan fácilmente:

$$v_1^2 = v_3^2 = a^2\dot\alpha^2, \qquad v_2^2 = a^2\left[\dot\alpha^2 + \dot\theta_1^2 + 2\dot\alpha\dot\theta_1\,\cos(\alpha-\theta_1)\right], \qquad v_4^2 = a^2\left[\dot\alpha^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\alpha\dot\theta_2\,\cos(\alpha-\theta_2)\right].$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\alpha,\theta_1,\theta_2,\dot\alpha,\dot\theta_1,\dot\theta_2) = \frac{1}{2}ma^2\left\{4\dot\alpha^2 + \dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\alpha[\dot\theta_1\cos(\alpha-\theta_1) + \dot\theta_2\cos(\alpha-\theta_2)]\right\}$$

$$+mga(4\cos\alpha + \cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

■ (b) La posición de equilibrio estable es $\alpha = \theta_1 = \theta_2 = 0$. Hasta orden cuadrático en los ángulos y sus derivadas, el lagrangiano se escribe (salvo una constate aditiva) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2\left[4\dot\alpha^2 + \dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\alpha(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\right] - \frac{mga}{2}(4\alpha^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2).$$

Las matrices de energía cinética y potencial son

$$\mathbf{T} = ma^2\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V} = mga\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las filas y columnas corresponden al siguiente orden de las variables

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

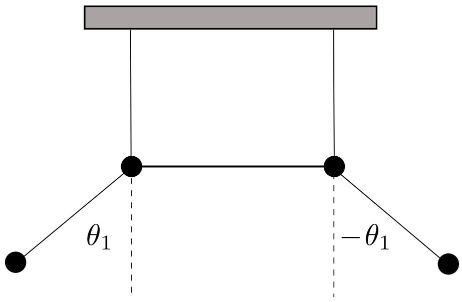
■ (c) No es especialmente difícil resolver la ecuación para los modos normales,

$$|\omega^2\mathbf{T} - \mathbf{V}| = 0.$$

Llamando $\lambda = (\omega/\omega_0)^2$, con $\omega_0^2 = g/a$, el determinante buscado es

$$|\lambda\mathbf{T} - \mathbf{V}| = \omega_0^2\begin{vmatrix} 4(\lambda-1) & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 4(\lambda-1)^3 - 2\lambda^2(\lambda-1) = (\lambda-1)\left[4(\lambda-1)^2 - 2\lambda^2\right].$$

A partir de aquí no es difícil resolver completamente el problema. Sin embargo, no se pedía hacer eso sino sólo proponer un modo y demostrar que verdaderamente lo era. El modo más evidente es aquel en que las dos masas inferiores oscilan antisimétricamente. Por simetría, la barra que une los péndulos debe permanecer en reposo.



La frecuencia de oscilación debería ser igual a la de un péndulo de longitud a, $\omega^2 = \omega_0^2$, lo que corresponde a $\lambda = 1$. En efecto, el modo propuesto tiene componentes

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

y además

$$(\lambda \mathbf{T} - \mathbf{V})\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda - 1 \\ 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Queda como ejercicio propuesto encontrar los otros dos modos normales e interpretarlos en términos de los modos normales de los péndulos dobles desacoplados.