Mecánica Clásica - Cuerpo Rgido: Ecuaciones de Euler

30 de octubre de 2012

1. Problema 17

Es el problema del trompo que no pudimos terminar el otro día en clase. Quería colgarlo para hacer una suerte de fe de erratas con respecto al planteo del problema y porque además no tuvimos la oportunidad de llevar a cabo la discusión sobre la parte interesante del problema: la interpretación de los resultados que surgen de las ecuaciones de Euler. Yo había asumido que la energía cinética se conservaba, y como bien marcó Vladimir, no es el caso, por lo que pido disculpas. Ahora sí, al problema.

Tenemos un trompo simétrico con un punto fijo O que, por lo demás, está inicialmente sometido únicamente a la acción de la gravedad, girando con una velocidad constante $\vec{\omega}$ paralela al eje de simetría (que llamaremos $\hat{3}$). En $t = 0$ entra en contacto con el piso (en el punto P) y, *casi* instantáneamente empieza a rodar sin deslizar sobre el plano. En ese casi instantáneamente se esconde un muy breve lapso en el que hay deslizamiento y, por lo tanto, pérdida de energía.

a) Se pide que demostremos que la componente del momento angular medido desde el punto fijo $\vec{L_o}$ paralela a la segmento $\overline{OP}$ (dirección que definiremos como $\hat{x}$, mientras que $\hat{z}$ será la dirección perpendicular al plano) se conserva en el contacto. Como dijimos, esto es una consecuencia directa del análisis de los torques ($\vec{T}$) involucrados en ese contacto. Las fuerzas involucradas son el peso $\vec{P}$, la fuerza de vínculo $\vec{F_v}$ aplicada en O, la normal $\vec{N}$ que ejerce el piso en el punto P y la fuerza de rozamiento $\vec{F_r}$. Como estamos tomando a O como centro de momentos, está claro que $\vec{F_v}$ no ejerce ningún torque, mientras que $\vec{P}$ y $\vec{N}$ se encuentran contendias en el plano zx en el momento del contacto, al igual que el punto donde se encuentran aplicadas, es decir, el centro de masa y P, respectivamente, mientras que el rozamiento está en la dirección y. Como $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$, los torques resultantes tendrán componentes en la dirección saliente a dicho plano, o sea, serán paralelos a $\hat{y}$ para el peso y la normal, o bien serán verticales, como en el caso del generado por la fuerza de rozamiento. En resumen, no hay torques en x, y por lo tanto la componente en estas direcciones del momento angular se conserva.

b) Podemos aprovechar el resultado que acabamos de obtener para responder la incógnita de esta segunda parte del problema: la nueva velocidad angular del trompo en la rodadura. Para esto, primero debemos encontrar una manera de escribir esta nueva velocidad angular y de relacionarla con $\vec{L_o}$ en este nuevo movimiento. Como en todos estos problemas de cuerpo rígido, la clave está en descomponer el asunto en términos de los ejes principales del cuerpo $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ en los que el tensor de inercia de nuestro trompo es diagonal. Como se trata de un trompo simétrico, en esta base tenemos dos momentos de inercia idénticos I y un tercer momento de inercia I_3, que es el que determinaba por ejemplo la energía de la rotación antes del contacto. Como estamos trabajando desde el punto fijo O, cabe resaltar que el tensor de inercia debe calcularse desde este punto (omitimos los supra-índices), o sea, el que calculemos desde el centro de masa corrido hasta O como lo indica el teorema de Steiner:

$$I_{ij} = I_{ij}^{CM} + M(v^2 \delta_{ij} - a_i v_j) \tag{1}$$

donde M es la masa total del trompo y $\vec{a}$ el vector que va desde el CM hasta O. En la base de ejes principales sabemos que la relación entre el momento angular **medido con respecto a un punto fijo** y la velocidad angular $\vec{\Omega}$ viene dada por

$$\vec{L_o} = \bar{\bar{I}}\vec{\Omega} = I(\Omega_1 \hat{1} + \Omega_2 \hat{2}) + I_3 \Omega_3 \hat{3} \tag{2}$$

Inicialmente, podemos tomar a $\hat{1}$ como un versor paralelo a $\hat{y}$ (entrante al dibujo de la guía), dejando a $\hat{2}$ contenido en el plano xz. Si no hubiese simetrías en el cuerpo rígido estos ejes rotarían con el mismo, pero la degeneración nos dice que cualquier par de versores ortogonales a $\hat{3}$ es equivalente en cuanto al tensor de inercia; por lo tanto, podemos redefinir instante a instante estos ejes principales como para que $\hat{2}$ este siempre contenido en el plano que forman z y el segmento que une al origen con el punto de contacto, lo cual facilita bastante las cuentas.

Para poder plasmar la conservación del momento angular en la dirección x tenemos que poder realcionar los versores $1, 2, 3$ con los del sistema cartesiano x, y, z. En particular, antes del contacto tenemos que $\vec{L_o} = I_3\omega\hat{3}$, por lo que tenemos componentes en x y z. Es fácil ver que

$$\hat{3} = cos(\alpha)\hat{x} + sen(\alpha)\hat{z} \tag{3}$$

Entonces, la componente conservada de $\vec{L_o}$ vale antes del contacto

$$L_x = I_3\omega sen(\alpha) \tag{4}$$

En el movimiento posterior al contacto, ya dentro del régimen de rodadura, tenemos dos rotaciones combinadas: la que da todo el trompo alrededor del eje z, que caracterizaremos con un ángulo ϕ en el plano xy (creciendo de x hacia $-y$) y la que tiene el cuerpo sobre su eje 3, asociada a un ángulo ψ. La velocidad angular sería entonces

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3} \tag{5}$$

Sin embargo, estos ángulos no son independientes: la condición de rodadura establece que, en valor absoluto, el arco recorrido por uno de estos ángulos es igual al del otro. Si d es lo que mide el segmento $\overline{OP}$ y R el radio del disco al que pertenece el punto P, la condición de rodadura implica que

$$\begin{aligned} d\phi &= R\psi \\ d\dot{\phi} &= R\dot{\psi} \end{aligned} \tag{6}$$

Reemplazando (3) y (6) en (5) obtenemos

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}[cos(\alpha)\hat{2} + (sen(\alpha) + d/R)\hat{3}] \tag{7}$$

En este momento es conveniente parar un segundo y mirar el problema con cuidado. Está claro que, en el régimen de rodadura, la recta que pasa por O y P es en todo momento un eje instantáneo de rotación, lo que implica que la velocidad angular del rígido es paralela a dicho eje. En el momento inmediatamente posterior al contacto esto implica que la velocidad angular es paralela al eje x. Ahora sí, volviendo a las cuentas, volvemos a hacer uso de la definición del impulso angular en términos del tensor de inercia y de $\vec{\Omega}$. Tenemos entonces

$$\vec{L_o} = \dot{\phi}[Icos(\alpha)\hat{2} + I_3(sen(\alpha) + d/R)\hat{3}] \tag{8}$$

por lo que la componente en x en ese instante posterior al contacto es

$$L_x = \dot{\phi}[-Icos(\alpha)sen(\alpha) + I_3(sen(\alpha) + d/R)cos(\alpha)] \tag{9}$$

Igualando (4) y (9) podemos despejar el valor (constante) de $\dot{\phi}$ y por lo tanto tenemos a la nueva velocidad angular $\vec{\Omega}$ en términos de ω, I, I_3, α y las distancias d y R. El resultado es

$$\dot{\phi} = \frac{I_3\omega tg(\alpha)}{(I_3 - I)sen(\alpha) + I_3 d/R} \tag{10}$$

Si bien las componentes Ω_i con $i = 1, 2, 3$ de este vector son constantes, el vector en sí no lo es porque los versores se mueven en el tiempo.

c) Escribir las ecuaciones de Euler. Recordemos que, en general, este sistema de ecuaciones dinámicas para la velocidad angular de un rígido en función de los torques externos se escribe, en términos de las componentes paralelas a los ejes principales, como

$$\begin{aligned} T_1 &= I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 \\ T_2 &= I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 \\ T_3 &= I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_2\Omega_1 \end{aligned}$$

que en el caso de un trompo simétrico se reducen a

$$\begin{aligned} T_1 &= I\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 \\ T_2 &= I\dot{\Omega}_2 + (I - I_3)\Omega_1\Omega_3 \\ T_3 &= I_3\dot{\Omega}_3 \end{aligned}$$

En el régimen de rodadura ya mostramos que $\Omega_1 = 0$ y que Ω_2 y Ω_3 son constantes, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} T_1 &= (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 \\ T_2 &= 0 \\ T_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hasta ahora sólo reemplazamos cosas que ya calculamos en las ecuaciones de Euler, paremos un segundo entonces y miremos qué información nueva podemos sacar. Sólo tenemos torque en la dirección de $\hat{1}$, que es el versor perpendicular al plano que contiene a O, P y el CM. Esto, por lo menos para mí, es completamente anti-intuitivo: tal vez esperaría que una fuerza importante en el movimiento fuera la de rozamiento, pero al ser paralela a y inicialmente y a $\hat{1}$ en todo momento, el producto vectorial que define al torque que podría realizar no tiene componente en esta dirección.

Luego de haber forzado al trompo a entrar en rodadura, el rozamiento en la dirección tangencial desaparece y la relación entre las rotaciones de ϕ y ψ se mantiene. Pero entonces, de dónde viene le torque T_1 que sí es no nulo?. No hay otra posibilidad de que sea la resultante entre los torques del peso $\vec{P}$ y de la normal $\vec{N}$ aplicadas en el CM y en el punto P, respectivamente. Esto permite ver una cualidad importante de las ecuaciones de Euler: como las tres componentes están acopladas, tener torque en $\hat{1}$ no nulo no implica que aparezca una velocidad angular en esta dirección. T_1 es, en este caso, como una fuerza de vínculo necesaria para mantener el movimiento así como lo imaginamos, con $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ constantes.