

## Segundo Parcial de Mecánica Clásica - 2do. c. 2008

**P1.** ( 4 puntos) Un cono con un punto de apoyo fijo  $o$  rueda sin deslizar sobre un plano inclinado en un ángulo  $\beta$ .

- Cuál es la velocidad angular del cono en función de los ángulos de Euler y su derivadas?
- Escriba el lagrangiano y la(s) ecuacion(es) de Lagrange usando coordenada(s) generalizada(s) apropiada(s). Ayuda: Use  $V = -m\vec{g} \cdot \vec{R}_{CM}$ .
- Determine la posición de equilibrio estable y calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor del mismo.
- Escriba las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler). Calcule el valor de la fuerza de rozamiento en función de  $\phi$ .

*Datos:* Momentos de inercia con respecto al CM:  $I_1 = I_2 = I$ ,  $I_3$ .

*Nota:* Considere que el rozamiento actúa solamente en el extremo del cono a una distancia  $D$  del punto  $o$ .

**P2.** (3 puntos) El hamiltoniano relativista que describe el movimiento bidimensional de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  sujeta a un campo magnético  $\vec{B}$  que deriva de un potencial vector  $\vec{A}$  ( $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ) se escribe:  
 $H = \sqrt{(c\vec{p} - q\vec{A})^2 + (mc^2)^2}$ .

- Hallar la velocidad a partir de las correspondientes ecuaciones de Hamilton. Pruebe que  $H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  ( $H$  es la energía cinética).
- Para el caso de campo magnético constante  $\vec{B} = B_0\hat{z}$ ,  $\vec{A} = -B_0y\hat{x}$ , encuentre la ecuación de la trayectoria usando el método de Hamilton-Jacobi. Calcule el radio de la misma en función de la energía y de los datos.

**P3.** (3 puntos) Se tiene una partícula sometida a un potencial periódico de período  $3a$  con la siguiente forma funcional:

$$V(x) = \begin{cases} V_0(x^2 - a^2) & \text{para } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{para } a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

- Construya el diagrama de fase para distintos valores de energía, aclarando que tipo de movimiento corresponde en cada caso. Hallar la ecuación de la separatriz si es que existe.
- Hallar las variables de acción  $J(E)$  para cada una de las regiones del diagrama de fase. Obtener el período en cada uno de los casos en función de la energía.
- Para  $E < 0$ , hallar la variable de ángulo  $\theta = \theta(x, J)$ . Hallar  $x(t)$ .  
**Ayuda**  $\int du \sqrt{a^2 - u^2} = \frac{1}{2}(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsin(\frac{u}{a}))$