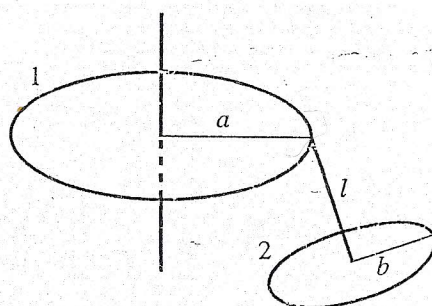


## Segundo parcial de Mecánica Clásica. Primer Cuatrimestre, 2003

1. El sistema de la figura consiste en dos discos unidos por una barra rígida de masa despreciable y longitud  $l$ . El disco 1 tiene masa  $m_1$  y radio  $a$ , y puede girar libremente en el eje indicado. La barra se encuentra unida a un extremo del disco y se mueve libremente en el plano formado por el radio y el eje de rotación del disco 1. El disco 2 tiene masa  $m_2$ , radio  $b$ , y puede girar sobre su eje. Hay gravedad.
  - (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
  - (b) Escriba el lagrangiano del sistema en coordenadas generalizadas apropiadas.
  - (c) Identifique las magnitudes conservadas. Justifique.
  - (d) Escriba el hamiltoniano del sistema.
  - (e) Suponga que inicialmente  $p_\psi = 0$  para el disco 2 (¿qué condición inicial da este resultado?). Escriba el potencial efectivo y gráfiquelo para el caso  $a \rightarrow 0$ . Indique puntos de equilibrio y describa cualitativamente los movimientos posibles del sistema.



2. Una partícula con carga  $q$  y masa  $m$  se encuentra en un campo magnético uniforme  $B_0 \hat{z}$  y un campo eléctrico uniforme  $E_0 \hat{y}$ .
  - (a) Halle el hamiltoniano del sistema utilizando como potencial vector  $\mathbf{A} = -B_0 y \hat{x}$ .
  - (b) Identifique las magnitudes conservadas. Justifique.
  - (c) Obtenga una solución integral de la ecuación de Hamilton-Jacobi.
  - (d) Calcule las ecuaciones que describen la trayectoria de la partícula. Discuta cualitativamente la solución hallada.

Ayuda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

3. Considere una partícula de masa  $m$  que puede moverse en la dirección  $\hat{x}$  bajo la acción del potencial

$$V(x) = \begin{cases} V_0 |x|/a & \text{si } -a \leq x \leq a \\ V_0 a/|x| & \text{si } x < -a \text{ o } x > a \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Dibuje el diagrama de fases, indicando puntos de equilibrio estables e inestable, zonas de libración y de movimiento no acotado. Indique claramente la dirección del flujo.
- (b) Exprese la ecuación de la curva separatriz.
- (c) En las regiones donde se aplique, halle la variable de acción  $J = J(E)$  y el período del movimiento en función de la energía.
- (d) Calcule la variable de ángulo  $\theta = \theta(x, J)$ . Describa cualitativamente la evolución  $x(t)$  del sistema.