Recuperatorio del Segundo Parcial de Mecánica Clásica - 2do. c. 2008

P1.(2 puntos) Se tiene el sistema de la figura compuesto por una tabla de longitud d, ancho b y masa M, sujeta por cuatro cuerdas de longitud l (ver figura). Sobre la tabla se halla un cilindro hueco de radio r, altura b y masa m. Si el cilindro hueco rueda sin deslizar sobre la tabla de modo que la generatriz del mismo es paralela al ancho de la tabla, se pide:

a) Escriba el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del problema utilizando coordenadas generalizadas apropiadas. Exprese las magnitudes que se conservan.

b) Repetir el ítem a) si ahora el cilindro hueco se mueve libremente sobre la tabla (puede deslizar).

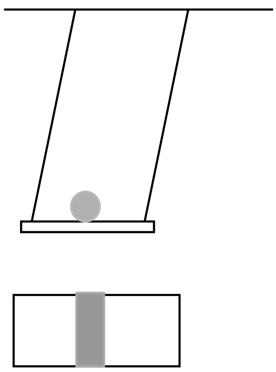
P2. (3 puntos) Un trompo con un punto de apoyo fijo O que inicialmente gira alrededor de su eje con velocidad angular ω (la velocidad de precesión es despreciable), toca el piso y casi instantáneamente (debido al rozamiento) pasa a rodar sin deslizar (ver figura):

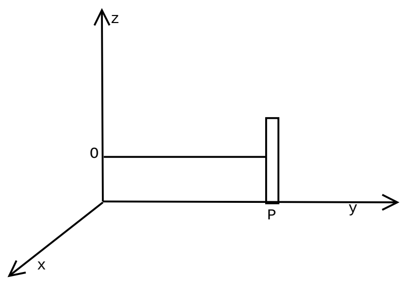
a) Pruebe que la componente en la dirección OP de $\mathbf{L_O}$ ($\hat{\mathbf{OP}} \cdot \mathbf{L_O}$) se conserva en el contacto.

b) ¿Cuál es la nueva velocidad angular del trompo una vez que empieza a rodar sin deslizar?

c) ¿Cuánto tarda el trompo en dar una vuelta alrededor de O?

Datos: Momentos principales de inercia repecto al punto O: $I_1 = I_2 = I$, I_3. Radio y longitud del volante: a y d.





P3. (2,5 puntos) El Hamiltoniano de dos osciladores armónicos acoplados se escribe:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{mw_1^2x^2}{2} + \frac{mw_2^2y^2}{2} + m\Omega^2 xy$$

a) Probar que la siguiente transformación es canónica:

$$x = Q_1\cos(\varphi) - Q_2\sin(\varphi) \qquad y = Q_1\sin(\varphi) + Q_2\cos(\varphi)$$

$$p_x = P_1\cos(\varphi) - P_2\sin(\varphi) \qquad p_y = P_1\sin(\varphi) + P_2\cos(\varphi)$$

b) ¿Cuál es el valor de φ tal que el nuevo Hamiltoniano queda desacoplado?

c) Para el caso anterior, exprese las frecuencias correspondientes a los modos normales.

P4. (2,5 puntos) El hamiltoniano relativista que describe el movimiento de una partícula de masa m y carga q, en presencia de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -E_0\hat{z}$ se escribe:

$$H = \sqrt{c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + (mc^2)^2} + qE_0 z$$

(considere la fuerza gravitatoria despreciable).

a) Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi y resuelvala para encontrar la solución general de la trayectoria $z(x, y)$ y la función $z(t)$.

b) Exprese la solución $z(t)$ para las siguientes condiciones iniciales: $z(0) = p_z(0) = p_y(0) = 0$, $p_x(0) = mv_0$.

c) Muestre que en el caso anterior, la función $z(t) \rightarrow -qE_0t^2/(2m)$ en el límite no relativista $qE_0t/m << c$.
Ayuda $\int du/\sqrt{u^2 - a^2} = ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$