

Segundo Parcial de Mecánica Clásica - 2do. c. 2008

- P1.** (4 puntos) Un cono con un punto de apoyo fijo o rueda sin deslizar sobre un plano inclinado en un ángulo β .
- Cuál es la velocidad angular del cono en función de los ángulos de Euler y su derivadas?
 - Escriba el lagrangiano y la(s) ecuacion(es) de Lagrange usando coordenada(s) generalizada(s) apropiada(s). Ayuda: Use $V = -m\vec{g} \cdot \vec{R}_{CM}$.
 - Determine la posición de equilibrio estable y calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor del mismo.
 - Escriba las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler). Calcule el valor de la fuerza de rozamiento en función de ϕ .

Datos: Momentos de inercia con respecto al CM: $I_1 = I_2 = I, I_3$.

Nota: Considere que el rozamiento actúa solamente en el extremo del cono a una distancia D del punto o .

- P2.** (3 puntos) El hamiltoniano relativista que describe el movimiento bidimensional de una partícula de masa m y carga q sujeta a un campo magnético \vec{B} que deriva de un potencial vector \vec{A} ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) se escribe:
 $H = \sqrt{(c\vec{p} - q\vec{A})^2 + (mc^2)^2}$.

- Hallar la velocidad a partir de las correspondientes ecuaciones de Hamilton. Pruebe que $H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (H es la energía cinética).
 - Para el caso de campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$, $\vec{A} = -B_0y\hat{x}$, encuentre la ecuación de la trayectoria usando el método de Hamilton-Jacobi. Calcule el radio de la misma en función de la energía y de los datos.
- P3.** (3 puntos) Se tiene una partícula sometida a un potencial periódico de período $3a$ con la siguiente forma funcional:

$$V(x) = \begin{cases} V_0(x^2 - a^2) & \text{para } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{para } a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

- Construya el diagrama de fase para distintos valores de energía, aclarando que tipo de movimiento corresponde en cada caso. Hallar la ecuación de la separatriz si es que existe.
- Hallar las variables de acción $J(E)$ para cada una de las regiones del diagrama de fase. Obtener el período en cada uno de los casos en función de la energía.
- Para $E < 0$, hallar la variable de ángulo $\theta = \theta(x, J)$. Hallar $x(t)$.
Ayuda $\int du\sqrt{a^2 - u^2} = \frac{1}{2}(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2\arcsin(\frac{u}{a}))$