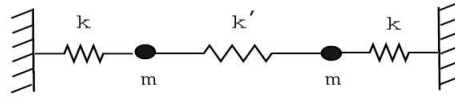


MECANICA CLASICA

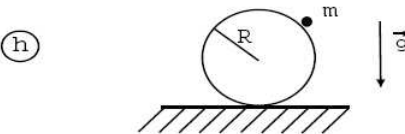
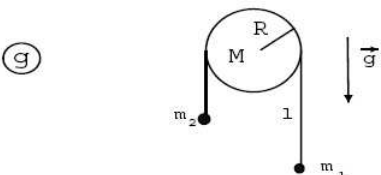
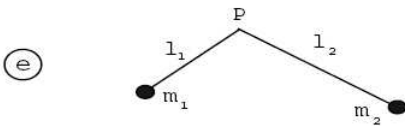
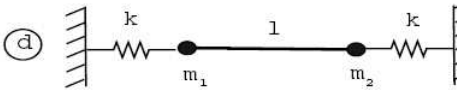
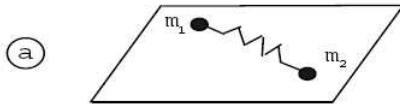
Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

Problema 1: Se tiene el sistema de la figura, donde x_1, x_2 se miden a partir de las posiciones de equilibrio. Sea $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$.

- ¿Definen (q_1, q_2) un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?
- Si $q_1 = 0$, describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Idem si $q_2 = 0$.
- Calcular las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2 .



Problema 2: Para los casos siguientes. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?. Proponga conjuntos de coordenadas generalizadas adecuadas:



a) m_1 y m_2 se mueven en el plano de la mesa.

b) Idem, pero la mesa rota con $\omega = \text{cte.}$

c) m_1 y m_2 se hallan dentro de un tubo. Si q_1 y q_2

se miden a partir del centro de masa, ¿son coordenadas apropiadas?

d) Las dos masas se hallan unidas entre sí por una barra rígida.

Analice el caso en que *sólo* pueden moverse horizontalmente y también el caso bidimensional.

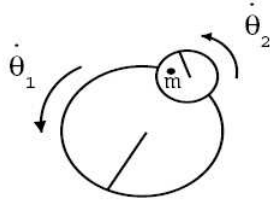
e) Discuta los casos P fijo y P móvil.

f) Una masa enhebrada en un alambre elíptico.

g) Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la polea.

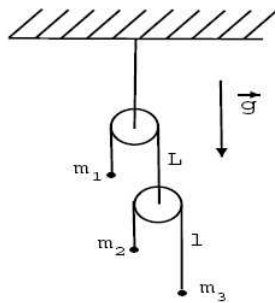
h) Una partícula puntual que cae por una esfera, con gravedad.

Problema 3: D_1 y D_2 son dos plataformas rotantes como se muestra en la figura. D_1 se mueve respecto a la tierra con velocidad $\dot{\theta}_1$. D_2 se mueve respecto a D_1 con velocidad $\dot{\theta}_2$. Una partícula de masa m se mueve libremente sobre D_2 . Escriba el lagrangiano del sistema en términos de coordenadas polares ρ, φ , de un sistema cartesiano fijo a D_2 . Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula e interprete.



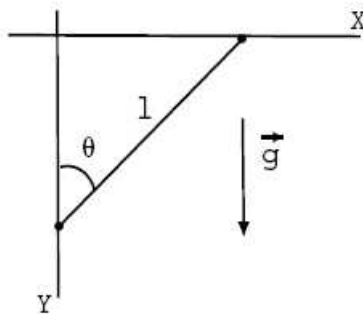
Problema 4: Se tiene el sistema de la figura. Hallar la aceleración de cada masa utilizando:

- a) Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.
- b) Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).
- c) Las ecuaciones de Lagrange.
- d*) Repita a y b, pero ahora considerando que las poleas tienen masa M y radio R .



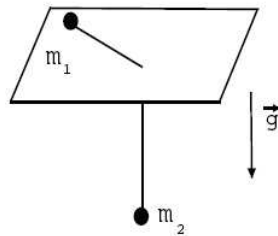
Problema 5: Dos partículas de masa m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l ; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y . Las condiciones iniciales son las que indica la figura.

- a) Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el PTV.
- b) Halle la ecuación de Lagrange para θ .
- c) Si $m_1 = m_2 \equiv m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ .
- d) ¿Cuál es el período de movimiento de θ en este caso?. Suponga que θ sólo puede tomar valores pequeños.



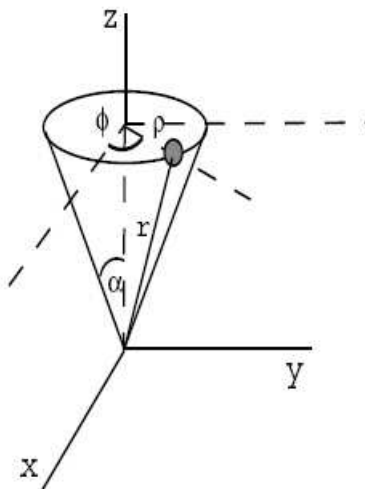
Problema 6: Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible como indica la figura. m_1 se mueve en el plano de la mesa y m_2 sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia r_0 del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

- a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.
- b) Halle la tensión del hilo.
- c) Repita a y b suponiendo ahora que el movimiento de m_2 es bidimensional.



Problema 7: Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza por una superficie cónica $\rho = z \operatorname{tg}\alpha$, sin rozamiento.

- a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo θ medido en el plano perpendicular al eje del cono y la distancia r al vértice del mismo, tomada a lo largo del cono.
- b) Hallar r máximo y r mínimo para el caso en que $\alpha = 30^\circ$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\theta}^2(0) = 4\sqrt{3}g/a$.
- c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.
- d) Suponiendo la partícula en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones de este movimiento. Compare este período con el de revolución para hacer una descripción cualitativa del movimiento perturbado.



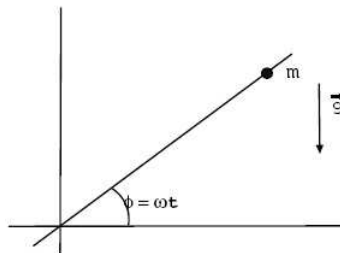
Problema 8: Analizar los siguientes puntos

- a) Dado un sistema constituido por N partículas, cuál es el número de grados de libertad del mismo? y cuál el de ecuaciones de vínculo?
- b) ¿Se puede utilizar una velocidad como coordenada generalizada?

- c) ¿Las fuerzas generalizadas se aplican sobre cada partícula?
- d) El número de grados de libertad de un sistema, ¿es independiente del sistema de referencia utilizado para describir el movimiento?
- e) Para estudiar el equilibrio de un sistema, ¿es siempre válido utilizar el *principio de los trabajos virtuales*?
- f) ¿Es válida la formulación lagrangiana para un potencial dependiente de la velocidad? y para el campo electromagnético?
- g) Dé un ejemplo en que un desplazamiento virtual difiera de uno real. ¿En qué casos son iguales?
- h) Las ecuaciones de vínculo para un sistema físico, ¿dependen del sistema de referencia utilizado?, y las fuerzas de vínculo?
- i) Para calcular las fuerzas de vínculo de un sistema, ¿qué métodos es posible emplear?
- j) ¿Siempre se pueden escribir las ecuaciones de Newton desde el centro de masa de un sistema?
- k) Para un sistema de N partículas, ¿cuántas ecuaciones de Newton se necesitan? ¿y de Lagrange?
- l) ¿Qué se entiende por un sistema inercial? ¿Serán correctas las ecuaciones de movimiento si se escribe el lagrangiano desde un sistema no inercial?
- m) Para una carga en un campo electromagnético, ¿se puede conservar el impulso lineal de la misma? ¿Qué magnitud se conserva?

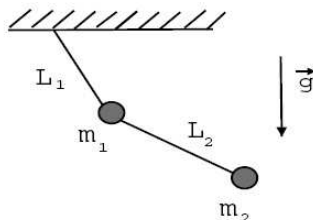
Problema 9: Sea el sistema de la figura.

- a) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando el método de Lagrange.
- b) Para el caso $\mathbf{g} = 0$, integre las ecuaciones para condiciones iniciales $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0$.
- c) Discuta el caso en que φ varía libremente.



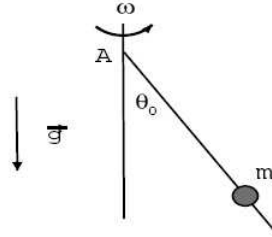
Problema 10: Considere el sistema de la figura.

- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble que oscila en un plano.
- b) Halle una expresión aproximada de las mismas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
- c) Resuelva las ecuaciones proponiendo una solución de tipo armónico para los grados de libertad. En $t = 0$ ambas masas se hallan en reposo sobre la vertical y a la inferior se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.
- d) Halle las tensiones sobre los hilos.



Problema 11: Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un alambre fijo en el punto A y que forma un ángulo θ_0 con un eje vertical y que se encuentra rotando alrededor del mismo eje con velocidad angular constante ω .

- Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.
- Halle $r(t)$ sabiendo que a $t = 0$, $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.

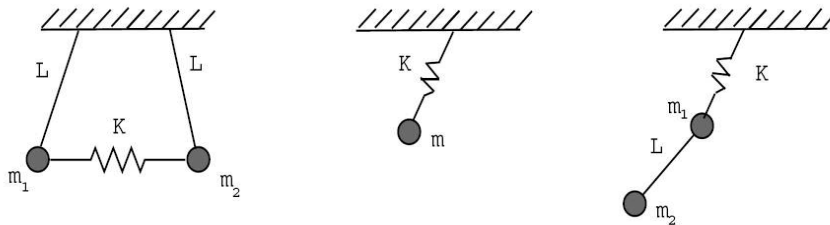


Problema 12: Considere el péndulo en tres dimensiones —péndulo esférico.

- Encontrar las ecuaciones de Lagrange para el mismo.
- A partir de las ecuaciones de Lagrange hallar las constantes de movimiento.
- Discuta cualitativamente el movimiento de este péndulo.

Problema 13: Escriba el lagrangiano de un péndulo plano donde el punto de suspensión: a) se desplaza uniformemente por un círculo vertical de radio a con frecuencia ω , b) efectúa oscilaciones verticales de la forma $a\cos(\omega t)$, c) efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a\cos(\omega t)$.

Problema 14: Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura. Existe gravedad.



Problema 15*: Sea una partícula libre de masa m y carga q en un campo electromagnético con potenciales ϕ , \vec{A} , ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial\vec{A}/\partial t$; $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$).

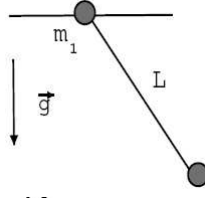
Obtenga a partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ —donde U es un potencial generalizado dependiente de la velocidad— las ecuaciones de movimiento.

Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la de Lorentz

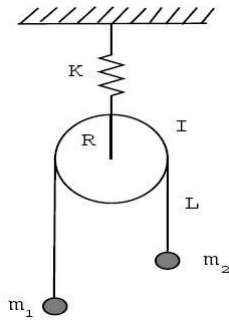
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), U = q\phi - q \vec{v} \cdot \vec{A}.$$

Problema 16*: Sean (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , dos sistemas de referencia cartesianos bidimensionales. Suponga que el origen de coordenadas O se mueve con $\vec{v} = cte$ respecto a x_1, y_1 y que los ejes x_2, y_2 rotan con velocidad angular constante. Hallar explícitamente las ecuaciones de transformación: $x_1 = x_1(x_2, y_2, t)$ y $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$.

Problema 17: Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa m_2 , con una masa m_1 en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de m_2 . Resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable. Suponga condiciones iniciales adecuadas.



Problema 18*: Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: una máquina de Atwood con una cuerda de largo l , una polea con momento de inercia I y que rueda sin deslizar con la cuerda.



Problema 19*: Sea una partícula de masa m y carga q inmersa en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

- a) Si $\vec{A} = Bx\hat{y}$ — compruebe que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ —, calcule las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son espirales cilíndricas. Calcule el radio y el centro de la circunferencia transversal a dicha espiral. Las condiciones iniciales son $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.
- b) Repita el punto a. pero ahora para el potencial vector $\vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.
- c) Calcule la función ψ que da el cambio de medida —cambio de gauge— $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$.
- d) Si $\vec{v}(0) = 0$, interprete físicamente la solución hallada en a.

Problema 20: Sea un oscilador isótropo bidimensional ($k_x = k_y \equiv k$).

- a) Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = y$.
- b) Sea $\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - kxy$. Halle las ecuaciones de movimiento para este sistema. Compare con las obtenidas en a.