MECANICA CLASICA

Principios variacionales.

Problema 1: Suponga que sabe experimentalmente que una partícula cae una distancia dada y en un tiempo $t_d = \sqrt{2y_d/g}$, pero que no se conoce el tiempo de caída para otras distancias. Suponga además que el lagrangiano del problema se conoce pero en lugar de resolver la ecuación de movimiento se prueba una forma funcional $y = a + bt + ct^2$. Muestre que la integral $I = \int \mathcal{L}\, dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $a = 0$, $b = 0$ y $c = -g/2$.

Problema 2: Una partícula se encuentra sometida a un potencial de tipo gravitatorio, $V(r) = -k/r$. Suponiendo que las órbitas son circulares, encuentre la relación entre los períodos y los radios de las órbitas utilizando el principio variacional de Hamilton [1].

Problema 3: Según Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x, y)\, ds$, donde $n(x, y)$ es el índice de refracción del medio inhomogéneo que la luz atraviesa. El problema se supone plano. Muestre que si $n(x, y) = n_0(1 + y/h)$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/h\alpha)$; α y β constantes de integración. *Ayuda: considere las ecuaciones de Euler–Lagrange.*

Problema 4: ¿Son afectadas las ecuaciones de movimiento si al lagrangiano se le agrega una derivada total con respecto al tiempo?.

Problema 5: Hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos de la superficie de un cilindro.

Problema 6: ¿Cambia la forma de un lagrangiano cuando se lo escribe en distintas coordenadas generalizadas?. Muestre un ejemplo.

Problema 7: Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = a\ddot{q} + bt\ddot{q} + \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$ (a y b son constantes arbitrarias) conduce a ecuaciones de movimiento que son de segundo orden.

Problema 8*: Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida al potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$ (oscilador anarmónico). La solución de la ecuación de movimiento no se conoce, pero, debido a la forma del potencial,se sabe que el movimiento será periódico y se prueba con una serie de ourier de la forma: $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$ tomando t=0 en un punto de retorno) donde ω resulta la pulsación (desconocida) del movimiento. Considere la integral de la acción entre dos puntos t_1 y t_2 separados por el período $T = 2\pi/\omega$.

Muestre que para $\beta = 0$, puede encontrarse un j tal que $a_0 = 0, a_n = 0$ para todo $n \neq j$ y $\omega = \frac{1}{j}\sqrt{\frac{k}{m}}$ representa una solución. Observar que todo j representa la *misma* solución. Interprete este hecho.

Problema 9*: Cuando se arroja un objeto hacia arriba, desde la superficie terrestre, el tiempo

[1] †Ayuda: considere la ecuación paramétrica de la elipse $x(\tau) = acos(\alpha\tau)$, $y(\tau) = bsen(\alpha\tau)$, y apartamientos de la trayectoria circular variando a ó b.

que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra resulta $t_c = 2v_0/g$.
A partir de una función de prueba dada por:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega t)$$

(desarrollo en serie de Fourier para $0 < t < t_c$), con $\omega = 2\pi/t_c$, encuentre la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Utilizando el valor que toma la acción para dicha trayectoria, compare la solución obtenida con la correspondiente al resultado $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. ¿Qué conclusiones saca?.