

MECANICA CLASICA

Simetrías, teorema de Noëther.

Problema 1: Sean tres masas m_1 , m_2 y m_3 , enhebradas en un aro circular fijo. Las masas interactúan a través de ciertos resortes especiales cuyo potencial es $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{2}k(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i, j = 1, 2, 3$ y k es una constante. En base a la simetría del lagrangiano hallar qué magnitudes se conservan.

Problema 2: ¿Qué componentes de \vec{p} y \vec{L} se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos?

- De simetría elipsoidal ($a \neq b \neq c$).
- Las superficies equipotenciales son planos homogéneos infinitos.
- Las superficies equipotenciales son cilindros infinitos.
- De simetría helicoidal.
- Campo debido a una red unidimensional de cargas positivas separadas entre sí una distancia d constante.
- De simetría toroidal.

Problema 3: ¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el potencial gravitatorio solar tuviera simetría cilíndrica?

Problema 4: Se tienen dos partículas de masa m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Demuestre explícitamente que para que se conserve el impulso angular es necesario que $V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.

Problema 5: Suponga una partícula de masa m sometida a un potencial externo V . Considerar los casos en los que el potencial presenta las siguientes invariancias (con δ arbitrario pero pequeño):

- $V(x, y, z) = V(x, y, z + \delta)$
- $V(x, y, z) = V(x + 3\delta, y - 2\delta, z + \delta/2)$
- $V(x, y, z) = V(x, y + z\delta, z - y\delta)$
- $V(\rho, \theta, \phi) = V(\rho + \delta, \theta, \phi)$
- $V(\rho, \phi, z) = V(\rho, \phi + \delta, z + 5a\delta/8)$

Encontrar en cada caso, si existen, constantes de movimiento relacionadas con estas invariancias. En cada caso además indique de qué transformación de simetría se trata.