MECANICA CLASICA

Fuerzas Centrales.

1. Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ. Este movimiento es detenido súbitamente. Luego se las suelta y caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un $t = \tau/4\sqrt{2}$.

2. El potencial de un oscilador isótropo es $V = \frac{1}{2}kr^2$.

   a. Dibuje el potencial efectivo para un caso general.

   b. Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.

   c. Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.

   d. Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la circular.

3. Considere los siguientes puntos.

   a. Discuta el movimiento de una partícula en un campo central $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$. En particular, muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma
   $$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\alpha\varphi}$$
   que es una elipse cuando $\alpha = 1$.

   b. Cuando $\alpha > 1$, es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad de precesión del perihelio. Encuentre una expresión para la velocidad de precesión en términos de α

   Ayuda: Observe que el problema se reduce al de Kepler, si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto *no* es necesario calcular nuevamente la órbita, si ya resolvió el problema de Kepler —lo resolvió?.

4. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

   a. Hallar la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$. Interpretar el movimiento bidimensional (θ, r) en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular las direcciones de las así ntotas si las hubiere. Qué ocurre cuando $k = 0$?. Verificar que en el límite $k \to 0$, la solución hallada es la físicamente correcta.

b. Suponer ahora que el potencial es atractivo. Qué ocurre cuando $l^2 > -2mk$?. Suponer que $l^2 < -2mk$, $E < 0$. Interpretar el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Qué pasa con $\dot{\theta}$? (no se pide calcular la trayectoria). Calcular el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno.

Ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{b}} \arccos(\frac{bu}{\sqrt{ab}}), & \text{si } a, b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln(\sqrt{-b}u + \sqrt{a - bu^2}), & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Para calcular la trayectoria, suponer r_0 un punto de retorno y $\theta_0 = 0$. Considere además la ayuda del problema anterior.

5. Considere una partícula de masa m que se mueve en el espacio bajo la acción de un campo de fuerzas radial $F(r) = -kr + c/r^3$, siendo r la distancia al origen de coordenadas.

    a. Escriba el lagrangiano y las constantes de movimiento en función de las coordenadas generalizadas elegidas.

    b. Halle la ecuación de la órbita ($r = r(\theta)$).

    c. Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c = 0$ y $c \neq 0$.

    d. Discuta en qué casos la órbita no será cerrada y calcule la velocidad angular de precesión.