MECANICA CLASICA

Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton–Jacobi

Problema 1: Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para
a) Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Use coordenadas cartesianas.
b) Una partícula en un potencial central $U(r)$
c) Un trompo simétrico con un punto fijo en el campo gravitatorio terrestre.
d) En **a)**, resuelva las ecuaciones. En **b)** y **c)**, halle constantes de movimiento. Particularizando en **b)** a $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles. En todos los casos construya los diagramas de fases correspondientes.

Problema 2: Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

Problema 3: Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano la energía total?.

Problema 4: Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ y H. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H?. ¿Es $H = E$?. Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

Problema 5: Considere un oscilador armónico unidimensional:
a) Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.
b) Halle la trasformación canónica de función generatriz: $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$ (ω: pulsación del oscilador).
c) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.
d) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?.

Problema 6: Considere un péndulo físico constituído por una barra de longitud l, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.
a) Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.
b) Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabili-

dad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.
c) Muestre que el área encerrada por la separatriz es 16α. Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

Problema 7: Considere los siguientes puntos:
a) Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \partial dft$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ ó $f = p_i$?. Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.
b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si $f =$ cte. de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?.

Problema 8: Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\vec{B}$ en la dirección $\hat{z}$.
a) Elija $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ y resuelva el problema.
b) Demuestre que la transformación que sigue es canónica y líguela a una solución alternativa de la parte a. $(\omega = qB/mc)$

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}senq_1 + p_2)\\
p_x &= \tfrac{\sqrt{m\omega}}{2}(\ \ \sqrt{2p_1}cosq_1 - q_2)\\
y &= \tfrac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}cosq_1 + q_2)\\
p_y &= \tfrac{\sqrt{m\omega}}{2}(\ \ \sqrt{2p_1}senq_1 + p_2)
\end{aligned}
$$

Problema 9: Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} A[a^2 - (x-a)^2] & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \ (A > 0) \\ 0 & \text{si } x \geq 2a \end{cases}$$

y choca elásticamente con la pared en $x = 0$. Construir el diagrama de fases correspondiente, mostrando claramente las regiones de libración y movimiento no acotado. Muestre que la variable de acción para el movimiento de libración es

$$J = \frac{a^2\sqrt{2mA}}{2\pi}\left[\epsilon - \frac{1}{2}(1-\epsilon^2)\ln\left[\frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)}\right]\right]$$

si la energía es $E = \epsilon^2 a^2 A$ $(\epsilon < 1)$ y que el período de libración es $\tau = 2\pi\frac{dJ}{dE}$ y que si $\epsilon \to 1, \tau \to \infty$.

Problema 10: Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente

las curvas de fases próximas al origen.
b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de la energía E en cada caso.

Problema 11: Considere una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$
a) Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.
b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$ donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cómo es la frecuencia del movimiento?
c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (con n,p números naturales y $\hbar =$ cte..). Discuta este punto con su docente.

Problema 12: Una partícula que se mueve en una sola dimensión está sometida a un potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} k(x-a)^2 & x > a \\ \frac{V_0}{a}(a - |x|) & |x| < a \\ k(x+a)^2 & x < -a \end{cases}$$

a) Dibuje el diagrama de fases indicando:
i) en cuántas regiones queda dividido el espacio de fases,
ii) cuál es la ecuación que define a la curva separatriz,
iii) cómo son los posibles movimientos.
b) i) Calcule la variable de acción para los movimientos con $E < V_0$.
ii) ¿Cuánto vale el período de dichos movimientos?. Las oscilaciones son armónicas?.

Problema 13: Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ $(k > 0)$, $V(\psi)$ periódico $[V(\psi + 2\pi) = V(\psi)]$.

Problema 14: Considere el sistema de la figura: una masa m se mueve sobre un plano inclinado un ángulo α con la horizontal y choca elásticamente con una pared en la base del plano. Tomando como coordenada la distancia a dicho punto medida sobre el plano:
a) Construya el diagrama de fases y calcule la frecuencia del movimiento para un dado valor de la variable de acción J.
b) Encuentre la variable de ángulo θ en función de q.

Problema 15: Resuelva los siguientes puntos:
a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador tridimensional isótropo en *cilíndricas* y en *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.
b) Resuelva el problema de la partícula en el campo magnético uniforme $\vec{B}$ utilizando como potencial vector $\vec{A} = Bx\hat{y}$.

Problema 16: Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

a) un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad).
b) Una máquina de Atwood, con polea *sin masa* y con polea de masa M y radio R.

Problema 17: Se tiene un sistema de dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{\vec{r}mcm} + H_{\vec{r}mrel}$

$$H_{\vec{r}mcm} = \frac{P^2_{\vec{r}mcm}}{2M} \qquad\qquad H_{\vec{r}mrel} = \frac{p^2_{\vec{r}mrel}}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

donde: $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, L es el momento angular total y $p_{\vec{r}mrel}$ es el momento canónicamente conjugado de r.

Problema 18: Demuestre la siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f. Sea c una constante. **a)** $[f, c] = 0$; $[f, f] = 0$; $[f, g] + [g, f] = 0$; $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$; $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$; $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$; $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$; $[f, F(f)] = 0$
b) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$; $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$
c) $[f, g^n] = ng^{n-1}[f, g]$; $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$

Problema 19: Sea el sistema de la figura, compuesto por dos trompos simétricos cuyos discos se hallan fijos a la mitad de dos ejes idénticos de longitud $2a$. A es un punto fijo alrededor del cual el eje AB se mueve libremente, B es una articulación y C es una arandela. Además, los trompos pueden girar sobre sí mismos. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton del sistema.

Problema 20: Considere los siguientes puntos:
a) Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.
b) Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ son las de $\vec{p}$ y las de $\vec{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$

Problema 21: Considere los siguientes puntos:
a) Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}$; $\quad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}$; $\quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$; $\quad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
Use [,].
b) Considere un oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q$. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{sen p}{q})$, $P = q \cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

Problema 22: Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$x = X cos\lambda + \frac{P_y sen\lambda}{m\omega}$

$p_x = -m\omega Y sen\lambda + P_x cos\lambda$

$y = Y cos\lambda + \frac{P_x sen\lambda}{m\omega}$

$p_y = -m\omega X sen\lambda + P_y cos\lambda$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

Problema 23: Considere una partícula sometida a un potencial $V(q) = U \cdot tg^2(\alpha q)$, U, α constantes positivas. Halle el hamiltoniano y plantee las ecuaciones de Hamilton. Construya el correspondiente diagrama de fases. Halle las variables de acción y ángulo del problema.

Problema 24: Encuentre la variable de acción para una partícula de masa m que se mueve con velocidad v y rebota elásticamente entre dos paredes fijas separadas por una distancia d. Sugerencia: haga el diagrama de fases.

Problema 25: Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\vec{r}|)$.
a) Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?
b) ¿Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico?. Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el escilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento como función de la energía.
c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i \hbar$?. ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas?. (n_i entero y $\hbar =$ cte.).

Problema 26: Para el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$
a) Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.
b) Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.
c) ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?.

Problema 27: Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1 q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistemas?. Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton (S). Encuentre o deduzca de allí el comportamiento dinámico del sistema.

Problema 28: Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida a una fuerza uniforme $F = at$ ($a =$ cte.) que aumenta linealmente con el tiempo. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi?. Muestre que la función principal de Hamilton (S) puede escribirse como

$$S = \frac{1}{2}at^2x + \alpha x - \phi(t)$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

Problema 29: Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$$

Resuelva el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. Qué sistema físico podría corresponder a este problema?. Resuelva este problema de otras tres maneras:
a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.
b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.
c) Por medio de variables de ángulo–acción.

Problema 30: Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x sometida a un potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x = x(t)$ utilizando S.

Problema 31: Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z, L_z es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.

Problema 32: ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas?. Idem para H y L_z.

Problema 33: ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamete variables canónicas?. Idem para L_x y L^2.

Problema 34: ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?.

Problema 35: Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\, dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como funciópn de q, pero que $F_1(q, Q)$ *sí* los es.