Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2013

Guía 4: *Fuerzas Centrales. Choque y dispersión.*

Problema 1: Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ. Este movimiento es detenido súbitamente. Luego se las suelta y caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un tiempo $t = \tau/4\sqrt{2}$.

Problema 2: El potencial de un oscilador isótropo es $V = (1/2)kr^2$.
a) Dibuje el potencial efectivo para un caso general.
b) Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.
c) Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.
d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la circular.

Problema 3: Estudie el movimiento de una partícula en un campo central $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$.
a) Muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma $r = a(1-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon\cos\alpha\varphi)$ que es una elipse cuando $\alpha = 1$.
b) Cuando $\alpha > 1$, es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad de precesión del perihelio. Encuentre una expresión para la velocidad de precesión en términos de α.
Ayuda: Observe que el problema se reduce al de Kepler, si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto *no* es necesario calcular nuevamente la órbita, si ya resolvió el problema de Kepler –¿lo resolvió?.

Problema 4: Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial central $V(r) = k/r^2$.
a) Hallar la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$. Interpretar el movimiento bidimensional (θ, r) en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular las direcciones de las asíntotas si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$?. Verificar que en el límite $k \to 0$, la solución hallada es la físicamente correcta.
b) Suponer ahora que el potencial es atractivo. ¿Qué ocurre cuando $l^2 > -2mk$?. Suponer que $l^2 < -2mk$, $E < 0$. Interpretar el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. ¿Qué pasa con $\dot{\theta}$? (no se pide calcular la trayectoria). Calcular el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno.
Ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{b}} \arccos\left(\frac{bu}{\sqrt{ab}}\right), & \text{si } a, b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left(\sqrt{-b}u + \sqrt{a - bu^2}\right), & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Para calcular la trayectoria, suponer r_0 un punto de retorno y $\theta_0 = 0$. Considere además la ayuda del problema anterior.

Problema 5: Considere una partícula de masa m que se mueve en el espacio bajo la acción de un campo de fuerzas radial $F(r) = -kr + c/r^3$, siendo r la distancia al origen de coordenadas.
a) Escriba el lagrangiano y las constantes de movimiento en función de las coordenadas generalizadas elegidas.
b) Halle la ecuación de la órbita ($r = r(\theta)$).
c) Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c = 0$ y $c \neq 0$.
d) Discuta en qué casos la órbita no será cerrada y calcule la velocidad angular de precesión.

Problema 6: Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de diámetro a.

Problema 7: Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa m, en un pozo de potencial esféricamente simétrico con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.

Problema 8: Considere una esfera rígida que absorbe las partículas de un haz incidente sobre ella con una probabilidad proporcional a la componente normal de la velocidad v_n (componente de la velocidad v que es normal a la superficie de la esfera). Las partículas no absorbidas rebotan elásticamente.
a) Hallar la sección eficaz diferencial.
b) Obtener la sección eficaz total. Justificar.

Problema 9: Se hace incidir un haz uniforme de partículas sobre un paraboloide de revolución perfectamente rígido, en forma paralela al eje de simetría del cuerpo.
a) Calcular la sección eficaz diferencial de *scattering*.
b) A partir de a) calcular, explícitamente, la sección eficaz total de *scattering*.

Problema 10: Se hace incidir un haz uniforme de partículas sobre un cono perfectamente rígido, en forma paralela al eje de simetría del cuerpo.
a) Calcular la sección eficaz diferencial de *scattering*.
b) ¿Puede obtener la sección eficaz total de *scattering*? Justificar.

Problema 11: En el ciclotrón de la CNEA se aceleran partículas α a una energía de 55 MeV. Se obtiene un haz interno de $0,5$ nanoamperes de intensidad que se hace incidir sobre un blanco de oro de $0,5$ miligramos de oro/cm^2 de espesor. A 20 cm de blanco y formando un ángulo de 5 grados con la dirección del haz incidente se coloca un detector de estado sólido que cuenta todas las partículas que pasan por un orificio circular de 1 mm de diámetro. ¿Cuántas partículas se espera contar por segundo por efecto de la dispersión Coulombiana?. Si el radio del núcleo constituido por A nucleones es $R \sim 1.2A^{1/3}$ fermi, ¿podrán observarse efectos nucleares?. ¿Cómo se manifestarán dichos efectos?.
Datos: 1 MeV $= 1,60 \times 10^{-6}$ ergios; 1 fermi$= 10^{-13}$ cm; oro: Au_{79}^{197}; partícula α: He_2^4; masa de nucleón: $1,67 \times 10^{-24}$ g; N_a= número de Avogadro= 6.02×10^{23} g mol^{-1}; $e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulombs; $e^2 = 1.43 \times 10^{-13}$ MeV cm.