Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2017

Guía 9: *Relatividad especial.*

Problema 1: Utilizando un diagrama espacio-temporal de Minkowski muestre los efectos de la contracción de Lorentz y de la dilatación temporal. Utilice la invariancia del intervalo para calibrar los ejes en ambos sistemas.

Problema 2: Un sistema S' se mueve con velocidad V respecto de otro sistema S.
a) Una varilla recta y fija en el sistema S' forma un ángulo θ' respecto de la dirección frontal del movimiento. Encontrar el ángulo θ de la varilla en el sistema S.
b) Una partícula masiva se mueve en el sistema S' con velocidad constante v' y un ángulo θ' respecto de la dirección frontal del movimiento. ¿Cuál es el ángulo θ medido en el sistema S?. Repetir el cálculo considerando que la partícula es un fotón.

Problema 3: Dos anillos de radio R rotan con velocidades ω iguales y opuestas. Sobre cada anillo se fija un reloj, y ambos relojes se sincronizan en la ocasión del primer encuentro. ¿Cuánto indica cada reloj en el siguiente encuentro?

Problema 4: En un sistema de referencia inercial S se propaga una onda electromagnética plana en una cierta dirección $\mathbf{n}$, de manera que la amplitud de la misma puede expresarse como

$$A = A_0 \cos[k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)]$$

a) Muestre que si se observa dicha onda desde un sistema S', que se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ respecto de S, la dirección de propagación será distinta, de valor

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + (\gamma - 1)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\mathbf{V}/V^2 - \gamma \mathbf{V}/c}{\gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}/c)},$$

efecto conocido como aberración.
b) Asimismo, muestre que la frecuencia $\omega = kc$, pasa a ser en el sistema S'

$$\omega' = \gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}/c)\omega,$$

que es el efecto Doppler relativista (difiere del galileano en el factor γ).

Problema 5: Considere la denominada paradoja de los mellizos.
a) Usando un diagrama espacio-temporal de Minkowski indique las líneas de universo de ambos mellizos y de las señales de radio que se envían uno al otro a intervalos regulares iguales en el sistema propio de cada uno de ellos. Note la diferencia de escalas en el diagrama de los intervalos para cada mellizo y discuta la diferencia entre intervalos de recepción de cada señal e intervalos de emisión.
b) Repita el análisis desde el punto de vista galileano, pero considerando que las señales de radio tienen siempre velocidad c independientemente de la velocidad de la fuente emisora.
c) Discuta la diferencia del efecto Doppler en los casos relativista y galileano como se manifiesta

en los diagramas previos.

Problema 6: Escriba las expresiones correspondientes al lagrangiano y al hamiltoniano relativistas en los siguientes casos:
a) Una partícula libre de masa m.
b) Una partícula de masa m y carga q que se mueve en presencia de un campo electromagnético con potenciales escalar ϕ y vectorial $\mathbf{A}$.

Problema 7: Considere un cohete libre de fuerzas que se impulsa emitiendo gases a velocidad V_G constante, relativa al cohete.
a) Usando la conservación del impulso total, pruebe que la ecuación que relaciona la velocidad v del cohete con su masa es

$$m\frac{dv}{dm} = -V_G\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

b) Intégrela y determine la velocidad final en función de la fracción de masa final del cohete (respecto de la inicial) y de V_G. Note la conveniencia de obtener el máximo V_G posible.

Problema 8: Una partícula de masa m y velocidad v choca con una partícula en reposo de masa M, siendo absorbida por ésta última. Encuentre la masa y la velocidad del sistema compuesto resultante.

Problema 9: Para un choque elástico de dos partículas de igual masa m, una de las cuales se encuentra en reposo mientras que la otra se mueve a velocidad $\mathbf{V}$, determine las energías de las partículas resultantes, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma una de ellas con la dirección de $\mathbf{V}$.

Problema 10: El fotón es una partícula de masa nula cuya energía vale $E = h\nu$, con h la constante de Planck. Se tiene que un fotón de longitud de onda λ incide sobre un electrón en reposo, cuya masa es m_e, saliendo con una longitud de onda λ' y un ángulo θ después del choque (*scattering* de Compton). Muestre que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$$

Problema 11: Se tiene una partícula en reposo, de masa m, que se desintegra.
a) Si el resultado consiste en dos partículas de masas m_1 y m_2, pruebe que la energía cinética (energía total menos energía en reposo) $T_{1,2}$ de cada una de ellas se expresa en la forma

$$T_{1,2} = \Delta mc^2\left(1 - \frac{m_{1,2}}{m} - \frac{\Delta m}{2m}\right).$$

donde $\Delta m = m - m_1 - m_2$ es el exceso de masa del proceso.
b) Considere ahora que la masa m se transforma en un conjunto de partículas, la suma de cuyas masas es igual a $m - \Delta m$. Usando lo deducido en la parte a), justifique que en el caso general la energía cinética máxima posible de una partícula resultante genérica de masa m_i es

$$T_i^{\max} = \Delta mc^2\left(1 - \frac{m_i}{m} - \frac{\Delta m}{2m}\right).$$

Problema 12: Una partícula de masa m que viaja a velocidad $\mathbf{V}$ se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2.

a) Determine la energía de cada una de ellas, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma la trayectoria de una de ellas con la dirección de $\mathbf{V}$.

b) Demuestre que conociendo las masas m_1 y m_2 de las partículas resultantes y el ángulo ente sus trayectorias puede determinarse la masa m de la partícula inicial.