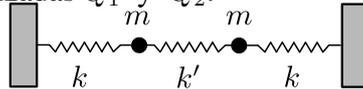


## Mecánica Clásica - 1er. cuatrimestre de 2018

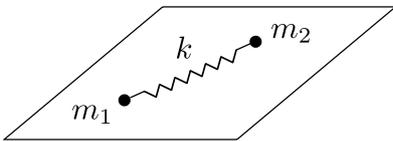
### Guía 1: Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

1. En el sistema de la figura, las posiciones  $x_1$  y  $x_2$  de las dos masas se miden a partir de sus puntos de equilibrio. Sea  $q_1 = x_1 + x_2$  y  $q_2 = x_1 - x_2$ .

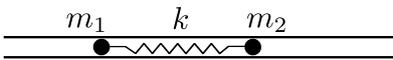
- (a) ¿Definen  $q_1$  y  $q_2$  un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?
- (b) Si  $q_1 = 0$ , describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Ídem si  $q_2 = 0$ .
- (c) Calcular las fuerzas generalizadas  $Q_1$  y  $Q_2$ .



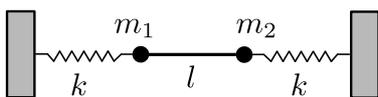
2. Para los casos siguientes, ¿cuántos grados de libertad tiene cada sistema? Proponga conjuntos adecuados de coordenadas generalizadas.



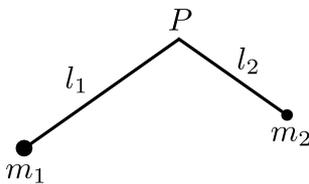
- a)  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en el plano de la mesa.
- b) Ídem, pero la mesa rota con  $\omega$  constante.



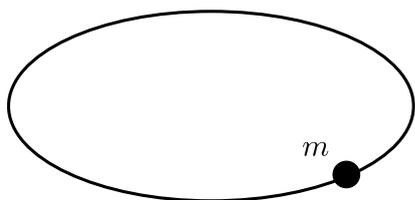
- c)  $m_1$  y  $m_2$  se hallan dentro de un tubo.  
Si  $q_1$  y  $q_2$  se miden a partir del centro de masa, ¿son coordenadas apropiadas?



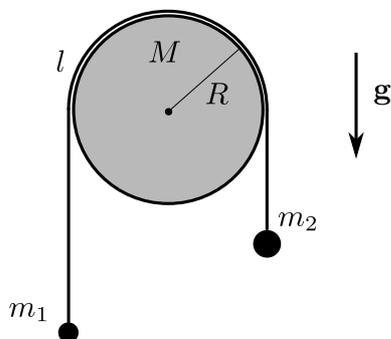
- d) Las dos masas se hallan unidas por una barra rígida. Analice los casos en que las masas pueden moverse horizontalmente o en el plano.



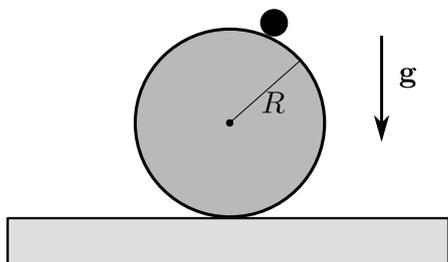
- e) Discuta los casos  $P$  fijo y  $P$  móvil.



f) Una masa enhebrada en un alambre elíptico.

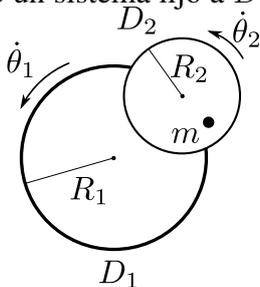


g) Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la p Polea.



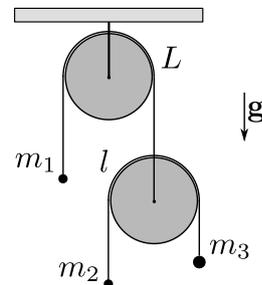
h) Una partícula puntual que cae por una esfera.

3.  $D_1$  y  $D_2$  son dos plataformas rotantes, como se muestra en la figura.  $D_1$  se mueve respecto al sistema de laboratorio con velocidad angular  $\dot{\theta}_1$ .  $D_2$  se mueve respecto a  $D_1$  con velocidad angular  $\dot{\theta}_2$ . Una partícula de masa  $m$  se mueve libremente sobre  $D_2$ . Escriba el lagrangiano del sistema en términos de las coordenadas polares  $\rho$  y  $\varphi$ , de un sistema fijo a  $D_2$ . Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula e interprete.



4. Para el sistema de la figura, hallar la aceleración de cada masa, utilizando:

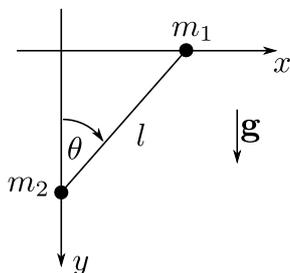
- (a) Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.
- (b) El principio de los trabajos virtuales (PTV).
- (c) Las ecuaciones de Lagrange.



(d)\* Repita (a) y (b), pero ahora las poleas tienen masa  $M$  y radio  $R$ .

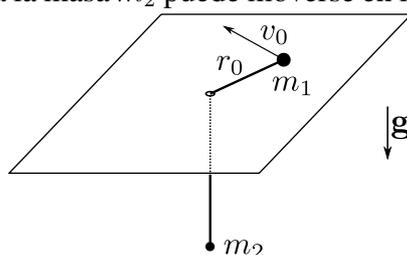
5. Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un hilo inextensible de longitud  $l$ ;  $m_1$  se mueve sólo sobre el eje  $x$  y  $m_2$  sólo sobre el  $y$ . Las condiciones iniciales son las que indica la figura.

- (a) Halle la ecuación de movimiento para  $\theta$  utilizando el PTV.
- (b) Halle la ecuación de Lagrange para  $\theta$ .
- (c) Si  $m_1 = m_2 \equiv m$ , halle la tensión  $T$  en el hilo como función de  $\theta$ .
- (d) ¿Cuál es el período de movimiento en este caso? Suponga que  $\theta$  sólo puede tomar valores pequeños.

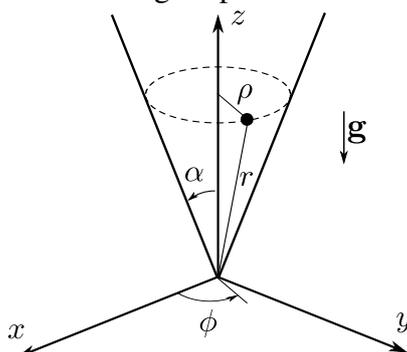


6. Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un hilo de longitud  $L$ , como indica la figura. La masa  $m_1$  se mueve en el plano de la mesa y  $m_2$  sólo verticalmente. En  $t = 0$ ,  $m_1$  se encuentra a una distancia  $r_0 < L$  del orificio y se le aplica una velocidad  $v_0$  perpendicular al hilo.

- (a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.
- (b) Halle la tensión del hilo.
- (c) Repita (a) y (b), pero ahora la masa  $m_2$  puede moverse en las dos direcciones de un plano vertical.



7. Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa  $m$  se desliza sin rozamiento sobre una superficie cónica definida por  $\theta = \alpha$ , donde  $\theta$  es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.



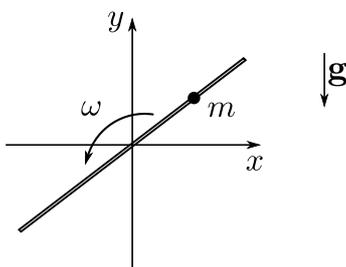
- (a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo  $\phi$  y el radio  $r$  de las coordenadas esféricas habituales.
- (b) Halle el  $r$  máximo y el  $r$  mínimo para el caso en que  $\alpha = 30^\circ$  y las condiciones iniciales sean  $r(0) = a, \dot{r}(0) = 0, \dot{\phi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$ .

- (c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.
- (d) Suponiendo que la partícula está en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones alrededor de este movimiento. Compare el período de las oscilaciones con el período de revolución y describa cualitativamente la órbita de la partícula.

8. Analizar los siguientes puntos.

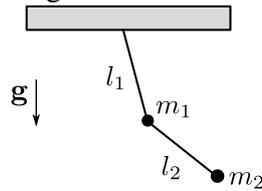
- (a) Dado un sistema formado por  $N$  partículas, ¿cuál es el número de grados de libertad del mismo y cuál el de ecuaciones de vínculo?
- (b) ¿Se puede utilizar una velocidad como coordenada generalizada?
- (c) ¿Las fuerzas generalizadas se aplican sobre cada partícula?
- (d) El número de grados de libertad de un sistema, ¿es independiente del sistema de referencia utilizado para describir el movimiento?
- (e) Para estudiar el equilibrio de un sistema, ¿es siempre válido utilizar el principio de los trabajos virtuales?
- (f) ¿Es válida la formulación lagrangiana para un potencial dependiente de la velocidad?, ¿y para el campo electromagnético?
- (g) Dé un ejemplo en que un desplazamiento virtual difiera de uno real. ¿En qué casos son iguales?
- (h) Las ecuaciones de vínculo para un sistema físico, ¿dependen del sistema de referencia utilizado?, ¿y las fuerzas de vínculo?
- (i) Para calcular las fuerzas de vínculo de un sistema, ¿qué métodos es posible emplear?
- (j) ¿Siempre se pueden escribir las ecuaciones de Newton desde el centro de masa de un sistema?
- (k) Para un sistema de  $N$  partículas, ¿cuántas ecuaciones de Newton se necesitan?, ¿y de Lagrange?
- (l) ¿Qué se entiende por un sistema inercial? ¿Serán correctas las ecuaciones de movimiento si se escribe el lagrangiano desde un sistema no inercial?
- (m) Para una carga en un campo electromagnético, ¿se puede conservar su impulso lineal? ¿Qué magnitud se conserva?

9. Para el sistema de la figura.



- (a) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando el método de Lagrange.
- (b) Para el caso  $g = 0$ , integre las ecuaciones para condiciones iniciales  $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0$ .
- (c) Discuta el caso en que la barra puede girar libremente.

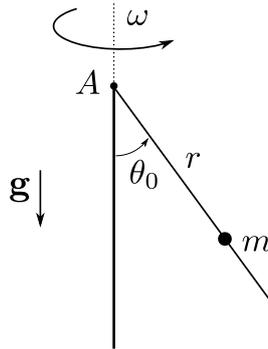
10. Considere el péndulo plano doble de la figura.



- Encuentre las ecuaciones de movimiento.
- Halle una expresión aproximada de las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
- Resuelva las ecuaciones proponiendo una solución de tipo armónico para los grados de libertad. En  $t = 0$  ambas masas se hallan sobre la vertical y a la inferior se le aplica una velocidad  $v_0$  perpendicular al hilo.
- Halle las tensiones sobre los hilos.

11. Una partícula de masa  $m$  se desliza sin fricción por un alambre fijo en el punto  $A$  y que forma un ángulo  $\theta_0$  con el eje vertical. El alambre rota alrededor del eje con velocidad angular constante  $\omega$ .

- Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.
- Halle  $r(t)$  sabiendo que en  $t = 0$ ,  $r(0) = r_0$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ .

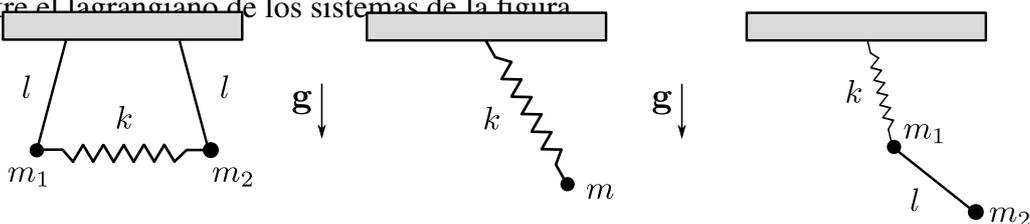


12. Considere el péndulo en tres dimensiones (péndulo esférico). Encontrar las ecuaciones de Lagrange y las constantes de movimiento. Discuta cualitativamente el movimiento de este péndulo.

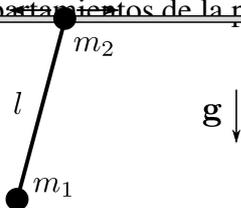
13. Escriba el lagrangiano de un péndulo plano donde el punto de suspensión:

- se desplace uniformemente por un círculo vertical de radio  $a$  con frecuencia  $\omega$ ,
- efectúa oscilaciones verticales de la forma  $a \cos \omega t$ ,
- efectúa oscilaciones horizontales de la forma  $a \cos \omega t$ .

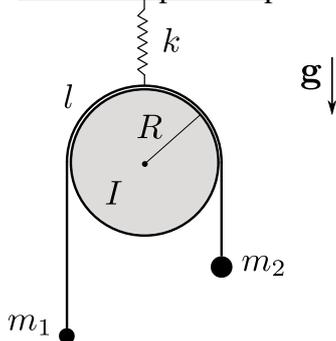
14. Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura



15. Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  está en un campo electromagnético con potenciales  $\varphi$  y  $\mathbf{A}$ . [ $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ]. A partir del lagrangiano  $L = T - U$ , donde  $U = q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}/c)$ , es un potencial generalizado dependiente de la velocidad. Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la de fuerza Lorentz,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$ .
16. Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  dos sistemas de referencia cartesianos bidimensionales. Suponga que, respecto del sistema  $(x_1, y_1)$ , el origen de coordenadas del sistema  $(x_2, y_2)$  se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  constante y que los ejes de  $(x_2, y_2)$  rotan con velocidad angular constante  $\omega$ . Hallar explícitamente las ecuaciones de transformación:  $x_1 = x_1(x_2, y_2, t)$  y  $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$ .
17. Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa  $m_1$ , con una masa  $m_2$  en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de  $m_1$ . Resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable.



18. Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: una máquina de Atwood con una cuerda de largo  $l$  que pasa sobre una polea con momento de inercia  $I$ .



19. Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  está en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ .
- Si  $\mathbf{A} = B_0 x \hat{y}$ , compruebe que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , calcule las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son hélices. Las condiciones iniciales son  $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ .
  - Repita el punto anterior, pero ahora para el potencial vector  $\mathbf{A}' = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$ .
  - Calcule la función  $\psi$  que da el cambio de medida  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ .
  - Si  $\mathbf{v}(0) = 0$ , interprete físicamente la solución hallada en (a).
20. Sea un oscilador isótropo bidimensional ( $k_x = k_y \equiv k$ ).
- Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas  $q_1 = x$  y  $q_2 = y$ .
  - Sea  $\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - kxy$ . Halle las ecuaciones de movimiento para este sistema. Compare con las obtenidas en (a).