

Mecánica Clásica - 1er. cuatrimestre de 2018

Guía 2: Principios variacionales y simetrías

Principios variacionales

1. Suponga que sabe experimentalmente que una partícula cae una distancia dada y_d en un tiempo $t_d = \sqrt{2y_d/g}$, pero no se conoce el tiempo de caída para otras distancias distintas de y_d . Suponga además que el lagrangiano del problema se conoce, pero en lugar de resolver la ecuación de movimiento se prueba una forma funcional $y(t) = bt + ct^2$. Si las constantes a , b , y c se ajustan de modo que y_d esté determinado correctamente por t_d , muestre que la integral $I = \int \mathcal{L} dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $b = 0$ y $c = -g/2$.
2. Una partícula se encuentra sometida a un potencial de tipo gravitatorio, $V(r) = -k/r$. Suponiendo que las órbitas son circulares, encuentre la relación entre los períodos y los radios de las órbitas utilizando el principio variacional de Hamilton. [Ayuda: considere la ecuación paramétrica de la elipse, $x(\theta) = a \cos \theta$, $y(\theta) = b \sin \theta$, y apartamientos de la trayectoria circular variando a o b .]
3. Una partícula está sometida solamente a un potencial de tipo armónico, $V(x) = kx^2/2$. Encuentre la ecuación de movimiento minimizando la acción de la siguiente manera:
 - (a) Divida el intervalo de integración en n partes.
 - (b) Reemplace las derivadas por su valor medio, $\dot{x}_i = \Delta x_i / \Delta t_i$, y la integral por una sumatoria.
 - (c) Imponga la condición de extremo $\partial I / \partial x_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$
 - (d) Tome el límite para $t_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.
 - (e) Interprete el resultado.
4. Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa m en un potencial cuártico $V(x) = \beta x^4/4$. Se trata de encontrar una expresión aproximada para el período T como función de la energía E . Para eso:
 - (a) Dada la familia de funciones $x(t, A) = A \sin \omega t$, con $\omega = 2\pi/T$, calcule la acción entre $t = 0$ y $t = T$ como función del parámetro A .
 - (b) Busque los extremos no triviales de la acción dentro de la familia de funciones $x(t, A)$. Esto da una relación entre A y T .
 - (c) Para la función que hace extrema la acción dentro de la familia $x(t, A)$, calcule la energía media \bar{E} durante un período T .
 - (d) Finalmente, escriba T como función de \bar{E} . Compare con el resultado exacto:

$$T(\bar{E}) = 2L \left(\frac{m^2}{\beta \bar{E}} \right)^{1/4},$$

donde $L = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma(1/4) / \Gamma(3/4) \approx 2.62206$ es la constante de la lemniscata. (En el caso de la solución exacta, E se conserva, de modo que no hay distinción entre E y \bar{E}).

5. Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x, y) ds$, donde $n(x, y)$ es el índice de refracción del medio que la luz atraviesa. El problema se supone bidimensional. Muestre que si $n(x, y) = n_0(1 + y/h)$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0) \cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde α y β son constantes de integración. (Ayuda: considere las ecuaciones de Euler–Lagrange.)
6. Demuestre, a partir del principio de acción estacionaria, que las ecuaciones de movimiento quedan inalteradas si al lagrangiano se le suma la derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
7. *Hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos de la superficie de un cilindro.
8. *Cuando se arroja un objeto hacia arriba, desde la superficie terrestre y con velocidad inicial v_0 , el tiempo que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra resulta $t_c = 2v_0/g$. A partir de una función de prueba dada por

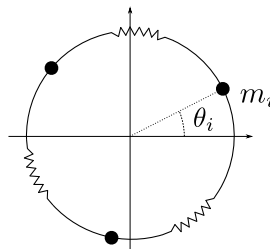
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right],$$

con $\omega = 2\pi/t_c$, encuentre la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Utilizando el valor que toma la acción para dicha trayectoria, compare la solución obtenida con la correspondiente al resultado $y(t) = v_0 t - gt^2/2$. >¿Qué conclusiones saca?

9. *Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = a\ddot{q} + bt\dot{q} + \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$, (a y b son constantes arbitrarias) conduce a ecuaciones de movimiento que son de segundo orden.

Simetrías

10. Tres masas m_1, m_2 y m_3 están enhebradas en un aro circular fijo. Las masas interactúan a través de ciertos resortes, cuyo potencial es $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{2}k(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i, j = 1, 2, 3$, y k es una constante. En base a la simetría del lagrangiano –teorema de Noether– hallar qué magnitudes se conservan.



11. ¿Qué componentes de \mathbf{p} y \mathbf{L} se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos?
- El producido por un elipsoide completamente asimétrico ($a \neq b \neq c$).
 - El producido por un plano infinito.
 - El producido por un cilindro circular infinito.
 - El producido por una hélice circular infinita.
 - El producido por una red unidimensional de puntos separados uno del otro una distancia d .

(f) El producido por un toro circular.

12. ¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el potencial gravitatorio tuviera simetría cilíndrica?
13. Dos partículas de masa m_1 y m_2 interactúan con un potencial $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demuestre explícitamente que para que se conserve el impulso angular es necesario que $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.
14. Calcule las constantes de movimiento para una partícula en el espacio, en un campo electromagnético, con potenciales:
 - (a) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x, y) \hat{z}$.
 - (b) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x^2 + y^2, z)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x^2 + y^2, z) \hat{z}$.