Mecánica Clásica - 1er. cuatrimestre de 2018

Guía 3: *Fuerzas centrales y dispersión*

1. Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ. Este movimiento es detenido súbitamente; luego las partículas caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

2. El potencial de un oscilador isótropo es $V = kr^2/2$.

   (a) Dibuje el potencial efectivo para un caso general.

   (b) Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.

   (c) Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.

   (d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular.

3. Discuta el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$. En particular, muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\alpha\varphi}.$$

   Cuando $\alpha = 1$ esta ecuación representa una elipse. Cuando $\alpha > 1$ es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad angular de precesión del perihelio. Encuentre esta velocidad en términos de α. (*Ayuda*: Observe que el problema se reduce al de Kepler si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto, si ya resolvió el problema de Kepler, no es necesario calcular nuevamente la órbita.)

4. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

   (a) Hallar la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$. Interpretar el movimiento bidimensional (θ, r) en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular las direcciones de las asíntotas, si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$? Verificar que en el límite $k \longrightarrow 0$ la solución hallada es la físicamente correcta.

   (b) Suponer ahora que el potencial es atractivo y que $l^2 < -2mk$ y $E < 0$. Interpretar el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular el tiempo que tarda la particula en llegar al origen si partió de un punto de retorno. (Para calcular la trayectoria tomar $\theta_0 = 0$ en el punto de retorno r_0.)

   Ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a-bu^2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{b}}\arccos\left(\dfrac{bu}{\sqrt{ab}}\right), & \text{si } a, b > 0; \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-b}}\log\left(u\sqrt{-b} + \sqrt{a-bu^2}\right), & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

   ¿Qué ocurre cuando $l^2 > -2mk > 0$?

5. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas central $F(r) = -kr + c/r^3$.

   (a) Escriba el lagrangiano y las constantes de movimiento.

   (b) Halle la ecuación de la órbita, $r(\theta)$.

   (c) Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c = 0$ y $c \neq 0$.

   (d) Discuta en qué casos la órbita no será cerrada y calcule la velocidad angular de precesión.

6. Un satélite de masa m se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$. Súbitamente el valor de la constante k se reduce a la mitad. Encuentre la nueva órbita.

Dispersión

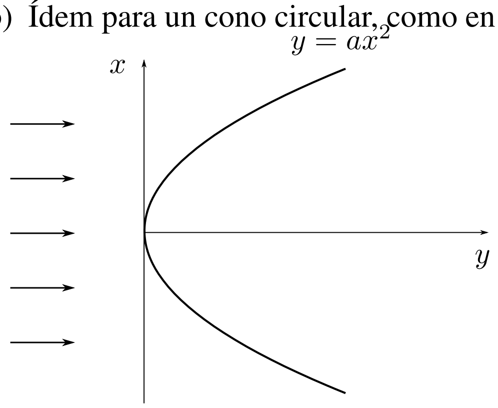
7. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de diámetro a.

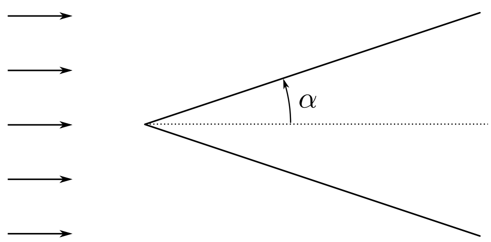
8. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa m en un pozo de potencial esféricamente simétrico, con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.

9. Sobre una esfera rígida incide un haz de partículas. Las partículas que chocan contra la esfera son absorbidas con una probabilidad proporcional a la componente de su velocidad normal a la esfera. Las partículas que no son absorbidas rebotan elásticamente. Hallar las sección eficaz diferencial y la total.

10. (a) Calcule la sección eficaz diferencial y total para partículas que inciden sobre un paraboloide de revolución, con el cual chocan de manera perfectamente elástica, como muestra la primera figura.

    (b) Ídem para un cono circular, como en la figura de la derecha.





11. En el ciclotrón de la CNEA se aceleran partículas α a una energía de 55 MeV. Se obtiene un haz de 0.5 nanoamperes de intensidad que se hace incidir sobre un blanco de oro de 0.5 mg/cm^2. A 20 cm del blanco y formando un ángulo de 5 grados con la dirección del haz incidente se coloca un detector de estado sólido, que cuenta todas las partículas que pasan por un orificio circular de 1 mm de diámetro. ¿Cuántas partículas se espera contar por segundo por efecto de la dispersión coulombiana? Para un núcleo formado por A nucleones, su radio viene dado aproximadamente por $R \sim 1.2A^{1/3}$ fermi. ¿Podrán observarse entonces efectos nucleares? ¿Cómo se manifestarían dichos efectos? Considere los siguientes datos: 1 MeV = 1.60×10^{-6} ergios; 1 fermi= 10^{-13} cm; oro: Au^{197}_{79}; part α: He^4_2; masa de los nucleones: 1.67×10^{-24} g; N_a = número de Avogadro = 6.02×10^{23}; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ coulombs; $e^2 = 1.43 \times 10^{-13}$ MeV cm.