Parcial Repaso-Mecánica Clásica-1er Cuat. 2018

Nota: recuerde entregar cada problema por separado. Justifique sus respuestas y razonamientos.

P1.

Se desea estudiar el comportamiento de un sistema como el de la Figura 1, compuesto por dos barras de longitud L y $l = l_1 + l_2$, donde $L > l$. Ambas barras de masas despreciables. La barra menor puede rotar alrededor del punto de unión de ambas o pivote, y posee una masa m_1 adosada a un extremo (a una distancia l_1 del pivote) y otra masa m_2 adosada al extremo que dista l_2 del mismo. Hay gravedad uniforme y se desprecian las fuerzas de rozamiento.

(a) Discuta cuántos grados de libertad son necesarios para describir al sistema. Elija coordenadas apropiadas y escriba el lagrangiano a partir de las mismas.

(b) ¿Qué relación se debe cumplir para que el ángulo de orientación de la barra menor sea una coordenada cíclica? En tal caso, ¿cuál es la magnitud conservada asociada? Interprete.

(c) Obtenga las ecuaciones de movimiento en las condiciones del inciso anterior y obtenga la evolución temporal de las coordenadas del sistema si se lo suelta desde el reposo desde alguna posición de la barra mayor muy cercana al equilibrio.

P2.

Una partícula de masa m en una dimensión está sujeta a un potencial anarmónico dado por $V(x) = \frac{k}{2}x^2 - \beta x^4$ con k y β constantes positivas.

(a) Proponiendo la solución de la forma $x(t) = A\,sin(\omega t)$ entre los primeros $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ use el principio variacional de Hamilton y encuentre una expresión aproximada para la relación entre la amplitud A y la fercuencia ω. De esta relación despeje ω en función de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, A, β y m. *Ayuda:* $\int_0^\tau sin^2(\omega t)dt = \frac{\tau}{2}, \int_0^\tau sin^4(\omega t)dt = \frac{3\tau}{8}$.

(b) Aplique su solución al problema de un péndulo de longitud l y masa M en un campo gravitatorio g y verifique la dependencia $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}$ *Ayuda:* $V(\theta) = \frac{Mgl}{2}\theta^2 - \frac{Mgl}{24}\theta^4$, con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

P3.

Dado el siguiente sistema formado por una anillo de masa M y radio R con una masa m enhebrada como muestra la Fig. 2. Ambos resortes idénticos de constantes k. Cuando el centro del anillo se encuentra en $x = 0$, ambos resortes se encuentran en equilibrio con una longitud natural l_0. Considerando también la acción de la gravedad,

(a) escriba el Lagrangiano del sistema. Nota: El anillo sólo puede desplazarse en la dirección de los resortes

(b) Exprese qué magnitudes se conservan. Justifique.

(c) Considerando $M = 2m$ y $\frac{g}{R} = \frac{2k}{M}$. Escriba el lagrangiano para pequeñas oscilaciones. Hallar los las frecuencias propias, modos y coordenadas normales del sistema.

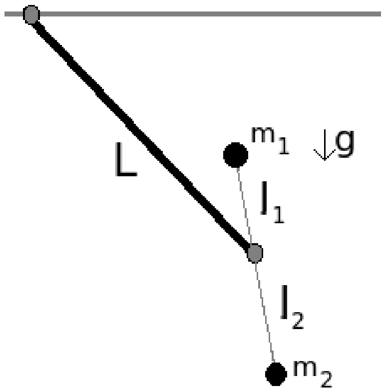

Figure 1: Figura **P1**

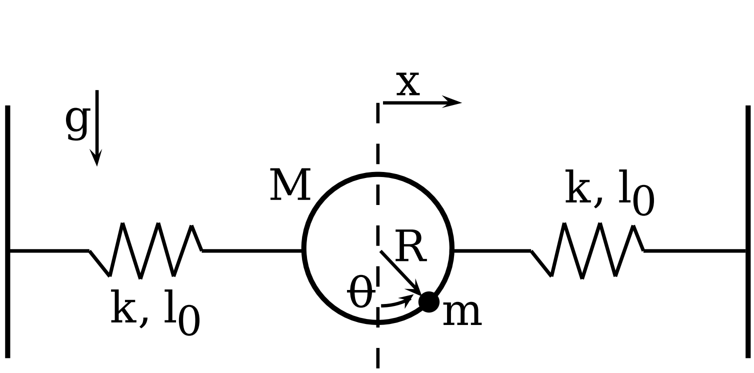

Figure 2: Figura **P3**