Mecánica clásica-2do cuatrimestre de 2018

Guía 7: *Cinemática relativista.*

Cinemática relativista.

1. Utilizando un diagrama espacio-temporal de Minkowski muestre los efectos de la contracción de Lorentz y de la dilatación temporal.

2. En un sistema de referencia inercial S se propaga una onda electromagnética plana en una cierta dirección **n**, de manera que la amplitud de la misma puede expresarse como

$$A = A_0 \cos[k(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - ct)].$$

Muestre que si se observa dicha onda desde un sistema S', que se mueve con velocidad **V** respecto de S, la dirección de propagación será distinta, de valor

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + (\gamma - 1)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathbf{V}/V^2 - \gamma\,\mathbf{V}/c}{\gamma(1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}/c)},$$

efecto conocido como aberración.
Asimismo, muestre que la frecuencia $\omega = kc$, pasa a ser en el sistema S'

$$\omega' = \gamma(1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}/c)\omega,$$

que es el efecto Doppler relativista (difiere del galileano en el factor γ).

3. Considere la famosa paradoja de los mellizos. Usando un diagrama espacio-temporal de Minkowski indique las líneas de universo de ambos mellizos y de las señales de radio que se envían uno al otro a intervalos regulares iguales en el sistema propio de cada uno de ellos.
Note la diferencia de escalas en el diagrama de los intervalos para cada mellizo y discuta la diferencia entre intervalos de recepción de cada señal e intervalos de emisión.
Repita el análisis desde el punto de vista galileano, pero considerando que las señales de radio tienen siempre velocidad c independientemente de la velocidad de la fuente emisora.
Discuta la diferencia del efecto Doppler en los casos relativista y galileano como se manifiesta en los diagramas previos.

Dinámica relativista.

4. Obtenga las ecuaciones de movimiento de una partícula relativista de carga q y masa m en un campo electromagnético externo.

5. Resuelva las ecuaciones de movimiento de una partícula de carga q y masa m en un campo magnético $\mathbf{B}=B_0\,\mathbf{z}$. Muestre que la velocidad de la misma rota alrededor de **B** con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega_0}=-(qc^2/E)\mathbf{B}$ denominada frecuencia de Larmor, donde E es la energía. Muestre que en el límite no relativista $v/c \ll 1$ se obtiene $\omega_0 \sim |q|B_0/m$ denominada también frecuencia de ciclotrón.

6. Para el caso en que la velocidad es perpendicular al campo magnético **B**, muestre que la partícula de carga q y masa m se mueve en una circunferencia de radio $R=v/\omega_0=\beta E/|q|B_0$. Calcule el valor del campo magnético necesario para mantener rotando en el acelerador LHC protones con E=7 TeV en un radio de 4,3 Km.

7. Considere un cohete libre de fuerzas que se impulsa emitiendo gases a velocidad V_G constante, relativa al cohete. Usando la conservación del impulso total, pruebe que la ecuación que relaciona la velocidad u del cohete con su masa es

$$m\frac{du}{dm}=-V_G\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Intégrela y determine la velocidad final en función de la fracción de masa final del cohete (respecto de la inicial) y de la velocidad de los gases de escape V_G. Note la conveniencia de obtener el máximo V_G posible.

8. Para una partícula de masa m que en reposo se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2, pruebe que la energía cinética $T_{1,2}$ (energía total menos energía en reposo) de cada una de ellas se expresa en la forma

$$T_{1,2}=\Delta mc^2\left(1-\frac{m_{1,2}}{m}-\frac{\Delta m}{2m}\right),$$

donde $\Delta m=m-m_1-m_2$ es el exceso de masa del proceso.
Considere ahora que un sistema o partícula de masa m se desintegra o transforma en reposo en un conjunto de partículas, la suma de cuyas masas es igual a $m-\Delta m$. Usando lo deducido para el caso de sólo dos partículas resultantes justifique que en el caso general la energía cinética máxima posible de una partícula resultante genérica de masa m_i es

$$T_i^{\max}=\Delta mc^2\left(1-\frac{m_i}{m}-\frac{\Delta m}{2m}\right).$$

9. Una partícula de masa m que viaja a velocidad **V** se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2. Determine la energía de cada una de ellas, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma la trayectoria de una de ellas con la dirección de **V**.
Demuéstrese que conociendo las masas m_1 y m_2 de las partículas resultantes y el ángulo ente sus trayectorias puede determinarse la masa m de la partícula inicial.

10. Para un choque elástico de dos partículas de igual masa m, una de las cuales se encuentra en reposo mientras que la otra se mueve a velocidad **V**, determine las energías de las partículas resultantes, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma una de ellas con la dirección de **V**.