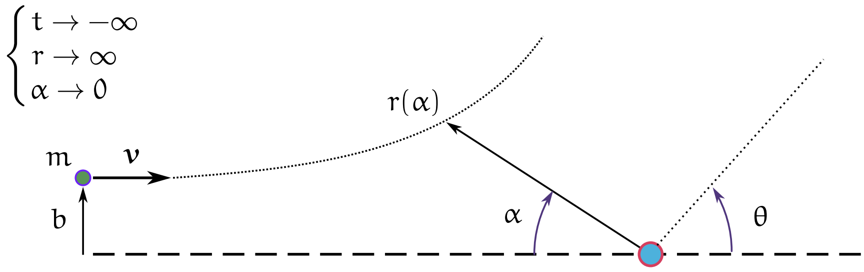
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019
Simulacro de parcial (resuelto).

■ **Problema 1**.

a) Encontrar la órbita $r(\alpha)$ para una partícula de masa m en un potencial repulsivo $V(r) = k/r^2$, con $k > 0$. La condición inicial es como muestra la figura.

b) Calcular la sección eficaz diferencial $\sigma(\theta)$.



a) **Primer método**. Usamos la conservación de l para reescribir la ecuación de la energía como la de un problema unidimensional,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = \mathcal{E}, \tag{1}$$

y volvemos a usar la conservación de l para cambiar de variable independiente de t a α,

$$\frac{l^2}{2mr^4}r'^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = \mathcal{E}, \tag{2}$$

donde r' significa derivada respecto de α. De aquí resulta

$$d\alpha = \pm\frac{dr/r^2}{\sqrt{\dfrac{2m\mathcal{E}}{l^2} - \left(1 + \dfrac{2mk}{l^2}\right)\dfrac{1}{r^2}}}. \tag{3}$$

El signo negativo debe elegirse mientras la partícula se acerca desde $r \to \infty$ hasta su valor mínimo. El signo positivo vale mientras se aleja. Las condiciones iniciales implican

$$\frac{2m\mathcal{E}}{l^2} = \frac{1}{b^2}, \qquad \frac{2mk}{l^2} = \frac{k}{\mathcal{E}b^2}. \tag{4}$$

Conviene definir una cantidad r_0 con unidades de longitud

$$r_0^2 = \frac{k}{\mathcal{E}}. \tag{5}$$

Mediante estas sustituciones queda

$$d\alpha = \pm\frac{dr/r^2}{\sqrt{\dfrac{1}{b^2} - \left(1 + \dfrac{r_0^2}{b^2}\right)\dfrac{1}{r^2}}}. \tag{6}$$

Con el cambio de variables $u = 1/r$ la integración es elemental. Como la función $\alpha(r)$ va a terminar siendo bivaluada, llamaremos $\alpha_<$ a la rama de la función válida durante el acercamiento. Así resulta

$$\alpha_<(r) = \int_0^{r^{-1}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 + \frac{r_0^2}{b^2}\right) u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}} \arcsin\left(\sqrt{b^2 + r_0^2}\,\frac{1}{r}\right). \tag{7}$$

Si fijamos en $t = 0$ el instante en el que r es mínimo, la relación anterior vale entre $t \to -\infty$ y $t = 0$. En $t = 0$, la velocidad radial debe anularse. La velocidad radial es proporcional al argumento que está dentro de la raíz cuadrada de la integral en la ec. (7). Así obtenemos el valor de $r_{\min}$,

$$r_{\min} = \sqrt{b^2 + r_0^2}. \tag{8}$$

El ángulo en el que r es mínimo está dado por

$$\alpha_0 = \alpha_<(r_{\min}) = \frac{\pi/2}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}}. \tag{9}$$

Invirtiendo la ec. (7) queda

$$r(\alpha) = \frac{\sqrt{b^2 + r_0^2}}{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right)}. \tag{10}$$

Esta relación vale entre $\alpha = 0$ y $\alpha = \alpha_0$.

Utilizando el subíndice '>' para indicar la rama de la función $\alpha(r)$ válida durante el alejamiento, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha_>(r) &= \alpha_0 + \int_{r_{\min}}^{r} \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 + \frac{r_0^2}{b^2}\right) \frac{1}{r^2}}} = \alpha_0 + \int_{r^{-1}}^{r_{\min}^{-1}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 + \frac{r_0^2}{b^2}\right) u^2}} \\ &= \alpha_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}} \arcsin\left(\sqrt{b^2 + r_0^2}\,\frac{1}{r_{\min}}\right) - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}} \arcsin\left(\sqrt{b^2 + r_0^2}\,\frac{1}{r}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

El segundo término es justamente igual a α_0. De manera que, durante el alejamiento,

$$\alpha_>(r) = 2\alpha_0 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}} \arcsin\left(\sqrt{b^2 + r_0^2}\,\frac{1}{r}\right). \tag{12}$$

Invirtiendo,

$$r(\alpha) = \frac{\sqrt{b^2 + r_0^2}}{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,(2\alpha_0 - \alpha)\right)}, \tag{13}$$

para $\alpha > \alpha_0$. Comparándola con la ec. (10), esta relación pone de manifiesto la simetría de la órbita respecto de la dirección α_0. Para que la función $r(\alpha)$ sea simétrica respecto de $\alpha = \alpha_0$ debería cumplirse que $r(\alpha_0 + \Delta\alpha) = r(\alpha_0 - \Delta\alpha)$. Llamando $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, es $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, y la condición de simetría se escribe como

$$r(\alpha) = r(2\alpha_0 - \alpha), \tag{14}$$

para $\alpha > \alpha_0$, que es lo que acabamos de encontrar.

En realidad las cosas son más simples aún. De acuerdo a la ec. (9), la ec. (13) se lee como

$$r(\alpha) = \frac{\sqrt{b^2 + r_0^2}}{\sin\left(\pi - \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right)} = \frac{\sqrt{b^2 + r_0^2}}{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right)}, \tag{15}$$

lo que demuestra que la ec. (10) es válida durante toda la trayectoria.

Por el mismo argumento de simetría que acabamos de invocar, cuando $t \to \infty$ debe ser $\alpha \to 2\alpha_0$. Podemos comprobar esto explícitamente. Las asíntotas de la órbita se obtienen resolviendo la ecuación $1/r(\alpha) = 0$,

$$\frac{1}{r(\alpha)} = \frac{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right)}{\sqrt{b^2 + r_0^2}} = 0. \tag{16}$$

A una de las asíntotas ya la conocemos, es $\alpha = 0$. La otra se obtiene cuando

$$\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha = \pi, \tag{17}$$

que, por la definición de α_0, ec. (9), da $\alpha = 2\alpha_0$.

a) **Segundo método**. Mucho más simple que todo lo anterior es usar la ecuación de Binet. Haciendo el cambio de variable $u = 1/r$ en la ec. (2) y usando las relaciones (4) y (5) resulta

$$u'^2 + \left(1 + \frac{r_0^2}{b^2}\right) u^2 = \frac{1}{b^2}. \tag{18}$$

Aunque ya podríamos leer la solución a partir de esta ecuación, derivemos una vez más respecto de α,

$$u'' + \left(1 + \frac{r_0^2}{b^2}\right) u = 0. \tag{19}$$

Es evidente entonces que

$$u(\alpha) = A \sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha + B\right). \tag{20}$$

La condición inicial $u = 0$ en $\alpha = 0$ implica $B = 0$. A la constante A podemos hallarla si evaluamos la ec. (18) en $\alpha = 0$. Usando la solución (20),

$$A^2\left(1 + \frac{r_0^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b^2}. \tag{21}$$

Puesto que u es una cantidad mayor o igual que cero, debemos tomar la raíz con signo positivo. Finalmente,

$$u(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + r_0^2}} \sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right) \qquad \Rightarrow r(\alpha) = \frac{\sqrt{b^2 + r_0^2}}{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right)}, \tag{22}$$

que coincide con el resultado del primer método.

b) **Sección eficaz**. Según vimos, el ángulo de la asíntota de alejamiento es

$$\alpha_\infty = 2\alpha_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}}. \tag{23}$$

Este ángulo es siempre menor que π. El ángulo de dispersión es entonces

$$\theta = \pi - 2\alpha_0 = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}}\right). \tag{24}$$

De aquí despejamos b^2,

$$b^2 = \frac{r_0^2}{\left(\frac{\pi}{\pi - \theta}\right)^2 - 1}. \tag{25}$$

La sección eficaz está dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}\left|\frac{db(\theta)^2}{d\theta}\right|. \tag{26}$$

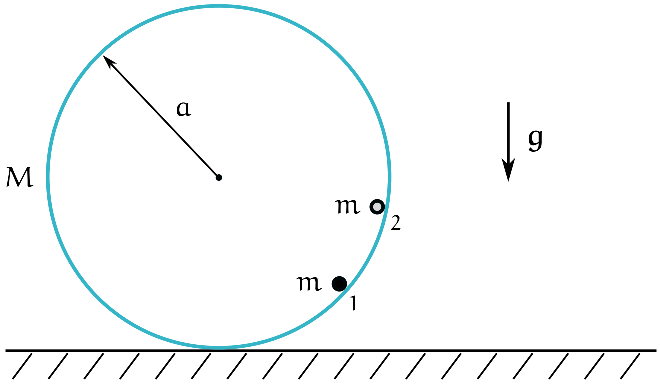
Conviene entonces reescribir la ec. (25) como

$$b^2 = \frac{r_0^2(1 - x)^2}{x(2 - x)}, \tag{27}$$

donde $x = \theta/\pi$. Derivando y tomando el valor absoluto, encontramos

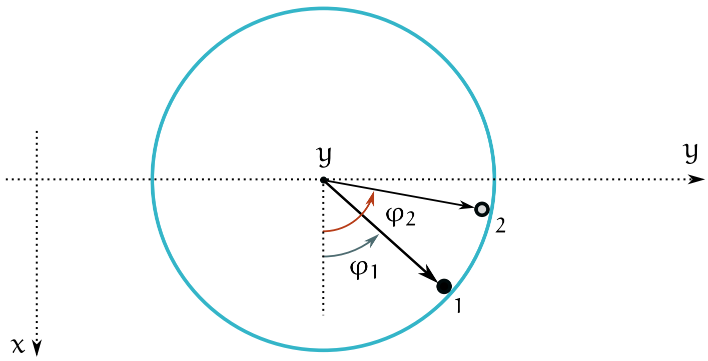
$$\frac{\sigma(\theta)}{\pi^2 r_0^2} = \frac{(\pi - \theta)}{\theta^2 (2\pi - \theta)^2} \frac{1}{\sin\theta}. \tag{28}$$

■ **Problema 2**. Dos partículas de masa m se mueven sobre un aro de masa M y radio a. El aro se mantiene en un plano vertical y rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Hay gravedad.



a) Definir coordenadas generalizadas.
b) Escribir el lagrangiano.
c) Encontrar al menos dos cantidades conservadas.
d) Considerar la configuración de equilibrio con las dos partículas en la parte más baja del aro. Escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones, encontrar las frecuencias y los modos normales. Describir gráficamente cada modo.

Solución. Resulta práctica la siguiente elección de coordenadas, y, φ_1 y φ_2.



Hay que tener en cuenta que la condición de rodadura permite fijar la orientación del aro conocida la posición de su centro. La posición del centro del aro es

$$\mathbf{r}_0(y) = y\,\hat{y}. \tag{29}$$

Las posiciones de las dos partículas son

$$\mathbf{r}_i(y, \varphi_i) = \mathbf{r}_0(y) + a\,\hat{\rho}(\varphi_i). \tag{30}$$

La energía cinética del aro tiene un término de traslación y otro de rotación, que están relacionados por la condición de rodadura, $\Omega = \dot{y}/a$,

$$T_{\text{aro}} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{y}^2, \tag{31}$$

donde

$$\mu = M + \frac{I}{a^2}. \tag{32}$$

No tiene mayor importancia escribir cuánto vale I.

Para calcular la energía cinética de las partículas, primero escribimos sus velocidades,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{y}\,\hat{y} + a\dot{\varphi}_i\,\hat{\varphi}(\varphi_i). \tag{33}$$

El módulo al cuadrado es

$$|\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \dot{y}^2 + a^2\dot{\varphi}_i^2 + 2a\dot{y}\dot{\varphi}_i\cos\varphi_i. \tag{34}$$

Aquí usamos que $\hat{\varphi}(\varphi)\cdot\hat{y} = \cos\varphi$. Finalmente, el lagrangiano es

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(y,\varphi_1,\varphi_2,\dot{y},\dot{\varphi}_1,\dot{\varphi}_2) = \\ &\frac{1}{2}(\mu+2m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2a\dot{y}\left(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2\right)\right] + mga(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2). \end{aligned} \tag{35}$$

Las cantidades conservadas que están a la vista son la energía,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mu+2m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2a\dot{y}\left(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2\right)\right] - mga(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2), \tag{36}$$

y el impulso generalizado asociado a la coordenada y,

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = (\mu+2m)\dot{y} + ma(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2). \tag{37}$$

Nos cuidamos bien de no llamar p_y a esta cantidad: p no es la componente y del impulso lineal. En realidad, debido a la fuerza de rozamiento que mantiene la condición de rodadura, la componente y del impulso lineal no tiene por qué conservarse. Es fácil ver que

$$p = p_y + \frac{I}{a}\dot{y}. \tag{38}$$

Es esto lo que se conserva y no p_y.

La posición de equilibrio estable con las dos partículas en la parte más baja del aro es indiferente a la elección del valor de y. Tomamos como posición de referencia aquella con $y = 0$. Para escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones *linealizamos* alrededor de $y = 0$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Las coordenadas de pequeñas oscilaciones siguen siendo y, φ_1 y φ_2. Salvo por una constante aditiva irrelevante, hasta términos de orden cuadrático, es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu+2m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2a\dot{y}\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)\right] - \frac{1}{2}mga\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right). \tag{39}$$

Tenemos la libertad de multiplicar este lagrangiano por una constante. Lo vamos a dividir por ma^2, de manera que en el término del potencial aparezca la frecuencia de pequeñas oscilaciones, $\omega_0^2 = g/a$, asociada a las partículas de masa m. Así, a todos los fines prácticos da lo mismo trabajar con el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\dot{y}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\frac{\dot{y}}{a}\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)\right] - \frac{1}{2}\omega_0^2\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right), \tag{40}$$

donde

$$\alpha = \frac{\mu + 2m}{m}. \tag{41}$$

En lugar de y, podemos usar como coordenada generalizada la cantidad adimensional $\theta = y/a$, que no es otra cosa que el ángulo de giro del aro con respecto a su posición de equilibrio. En definitiva, las tres coordenadas generalizadas representan ángulos y es

$$\mathcal{L}^*(\theta, \varphi_1, \varphi_2, \dot{\theta}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\theta}\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)\right] - \frac{1}{2}\omega_0^2\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) \tag{42}$$

Llamando $\mathbf{x}$ al vector $(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, el lagrangiano de pequeñas oscilaciones puede escribirse como

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbf{x}, \tag{43}$$

donde

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{V} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Definiendo $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$, el problema de autovectores y autovalores es

$$(\lambda\mathbb{T} - \mathbb{V}) \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{45}$$

La ecuación característica es

$$\det \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{46}$$

Calculando explícitamente el determinante, queda

$$\lambda(\lambda - 1)\left[(\alpha - 2)\lambda - \alpha\right]. \tag{47}$$

La raíz $\lambda_1 = 0$ corresponde a un modo de traslación, $\omega_1 = 0$. El autovector es

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

El aro avanza a velocidad constante con las dos partículas en su parte más baja.

El autovalor $\lambda_2 = 1$ implica $\omega = \omega_0$, la misma frecuencia que si el aro estuviera fijo y las partículas oscilaran libremente. De manera previsible, el autovector es

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

El aro está en reposo y las dos partículas oscilan simétricamente.

El tercer autovalor es

$$\lambda_3 = \frac{\alpha}{\alpha - 2} = 1 + \frac{2m}{\mu}, \tag{50}$$

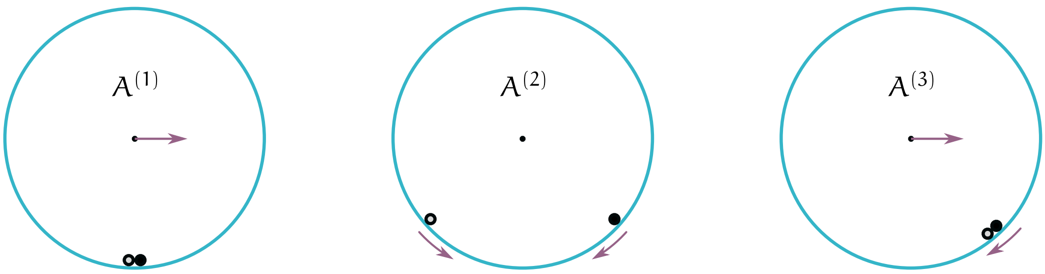
lo que implica

$$\omega_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{2m}{\mu}\right)\omega_0^2}. \tag{51}$$

Su autovector es

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{2m}{\mu+2m} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Las dos partículas oscilan una sobre la otra y en contrafase del aro. Si el aro tiene una masa mucho mayor que la de las partículas, su amplitud de oscilación tiende a cero y las partículas oscilan a una frecuencia muy próxima a ω_0, tal como si el aro estuviera fijo. Si en cambio m es mucho más grande que μ, las tres amplitudes de oscilación son aproximadamente iguales y la frecuencia ω_3 es mucho mayor que ω_0. Creo que a este modo de oscilación lo pueden haber visto cuando presionan fuertemente un rollo de cinta de embalar contra una mesa, como si quisieran fijarlo con el dedo en un determinado punto. Verán que el rollo oscila rápidamente durante un breve instante.



Verifiquen que $\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(j)} \propto \delta_{ij}$ y encuentren las coordenadas normales.