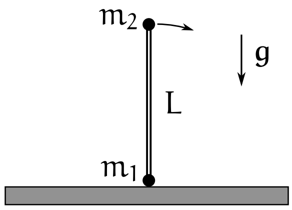
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Guía 1: *Ecuaciones de Newton. Leyes de conservación. Coordenadas curvilíneas.*

1. Dos partículas, m_1 y m_2, están unidas por una barra rígida de longitud L. Se coloca la barra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como muestra la figura, y se la aparta levemente de la vertical. ¿En qué punto de la superficie golpea m_2?

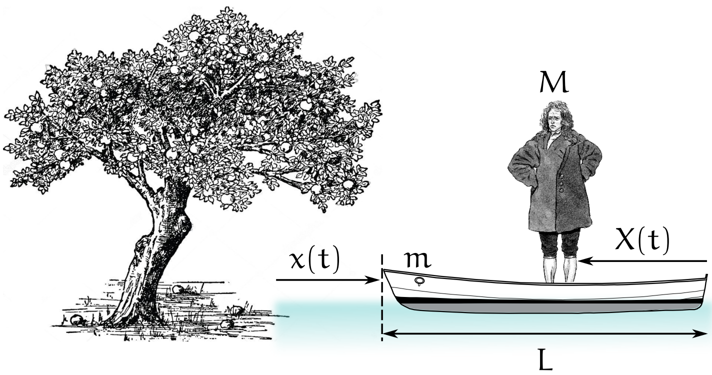


2. *Un hombre de masa M está en el extremo $X = 0$ de un bote de masa m y longitud L, que flota estacionario en el agua. El hombre camina hasta el extremo opuesto del bote.

   a) Si el agua no ofrece resistencia, ¿cuánto se desplaza el bote respecto del agua?

   b) Si el agua ofrece una fuerza viscosa dada por $-kv$, donde $k > 0$ y v es la velocidad del bote, mostrar que el bote ¡vuelve a su posición inicial!

   c) Parece paradójico que para cualquier valor no nulo de k el bote vuelva a su posición inicial, pero que para un valor estrictamente cero se mueva una distancia finita. Para entender la discontinuidad en la posición final del bote como función de k, suponga que la posición del hombre respecto del bote es $X(t)$, escriba las ecuaciones de movimiento y halle la posición $x(t)$ del bote para todo t. Ensaye diversas funciones $X(t)$, grafique sus resultados y vea qué pasa a medida que $k \to 0$.



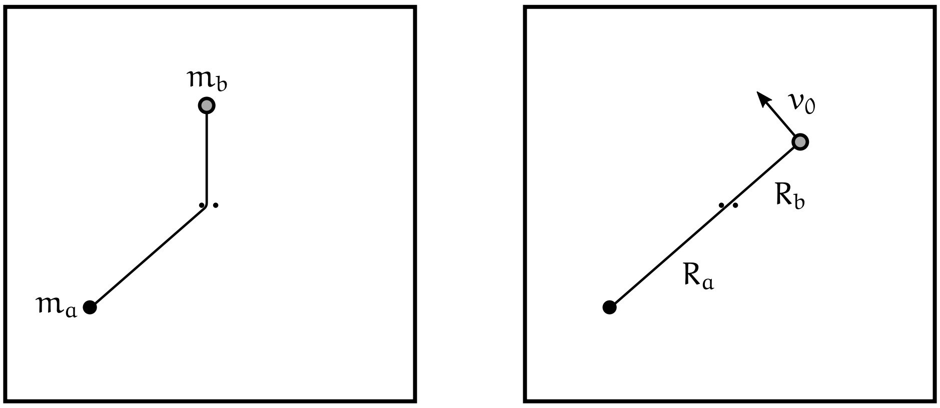
3. Un disco de masa M y radio R gira con velocidad angular ω. Una mosca de masa m, que al inicio está en el centro del disco, camina radialmente con velocidad radial constante.

   a) Si el disco gira con ω constante, ¿qué torque externo debe haber para compensar el movimiento de la mosca? ¿Cuál es la fuerza de Coriolis que siente la mosca?

   b) Si el disco gira libremente, ¿cuál será la velocidad angular del disco cuando la mosca esté a una distancia r del centro?

*D. Tilley, *Dynamical Paradox*, Am. J. Phys. **35**, 546 (1967); doi:10.1119/1.1974176.

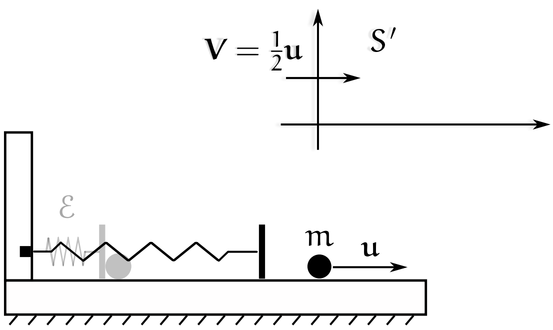
4. Dos partículas, de masas m_a y m_b, están sobre una mesa horizontal sin fricción, unidas por una cuerda tensa de longitud L. La cuerda está obligada a pasar por el centro de la mesa (por ejemplo, mediante dos clavos separados por una distancia despreciable). Inicialmente las partículas están quietas, con la cuerda en línea recta a través del centro de la mesa, como muestra la figura de la derecha. En $t = 0$, la masa m_b recibe un impulso perpendicular a la cuerda y adquiere una velocidad v_0.



   a) ¿Qué magnitudes se conservan?
   b) Dar las velocidades de las partículas en función de sus distancias al centro de la mesa.
   c) Hallar la tensión de la cuerda en función de la distancia de una masa al centro de la mesa.

5. Varias partículas interactúan desde $t = 0$ y hasta $t = T$. Fuera de ese intervalo se las puede considerar libres. ¿Es posible que la variación de la energía cinética entre $t = 0$ y $t = T$ sea cero y que, sin embargo, la variación del impulso lineal sea no nula? Y a la inversa, ¿es posible que el momento lineal no varíe y que, sin embargo, la energía cinética en $t < 0$ sea distinta que en $t > T$? *Ayuda*: en el primer caso, suponer que la energía se conserva en el sistema de laboratorio y analizar la conservación de la energía desde un sistema que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ respecto del sistema de laboratorio.

6. Este problema es muy sutil. Un extremo del resorte de la figura está firmemente sujeto a una de las paredes del laboratorio. Se comprime el resorte hasta que almacena una energía elástica $\mathcal{E}$. En el extremo libre se coloca una partícula de masa m. Se libera el resorte, que se expande y empuja a la partícula una cierta distancia antes de perder contacto entre sí.



a) ¿Cuál es la velocidad final $\mathbf{u}$ de la partícula cuando se separa del resorte?

b) ¿Cuánto vale la variación de la energía cinética de la partícula? ¿A dónde ha ido a parar la energía elástica acumulada en el resorte?

c) El mismo experimento es observado desde un sistema S' que se mueve uniformemente con velocidad $\mathbf{V} = \mathbf{u}/2$, como muestra la figura. Vista desde este sistema, la partícula se acelera desde una velocidad inicial $-\mathbf{u}/2$ hasta una velocidad final $\mathbf{u}/2$. ¿Cuánto vale la variación de su energía cinética? ¿A dónde ha ido a parar la energía elástica acumulada en el resorte? ¿A dónde, eh?

7. Un sistema de masas puntuales es descripto desde un sistema inercial, en el cual la masa m_i tiene posición $\mathbf{r}_i$ e impulso $\mathbf{p}_i$. Respecto del sistema centro de masa, las posiciones y los impulsos son $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{p}'_i$. Compare las siguientes definiciones del impulso angular respecto del centro de masa:

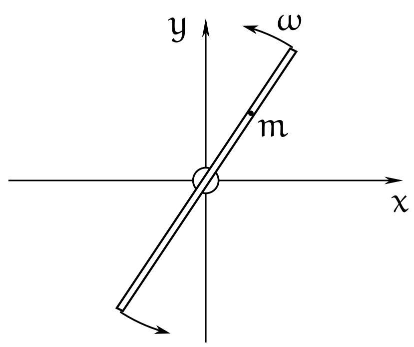
$$\mathbf{L}_1 = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i, \qquad \mathbf{L}_2 = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}'_i, \qquad \mathbf{L}_3 = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}_i.$$

Encuentre en cada caso la relación entre estos impulsos y el referido al sistema inercial.

8. ¿Pueden conservarse dos componentes del impulso angular y no conservarse la tercera?

9. Si el CM de un sistema está acelerado, ¿sigue siendo válida la relación $\dot{\mathbf{L}}_{CM} = \mathbf{N}_{CM}$?

10. Una partícula de masa m está restringida a moverse sin fricción en el interior de un tubo cilíndrico delgado. El tubo rota con velocidad angular constante ω alrededor del origen.



a) Hallar las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas y polares.

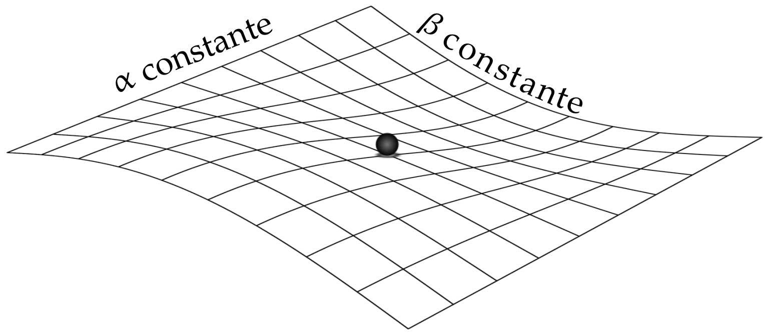
b) Hallar la fuerza de vínculo en función del tiempo si en el instante inicial la partícula está quieta con respecto al tubo y a una distancia a del origen.

11. Demostrar que la derivada de un versor (sea cual sea la variable de la que depende) es perpendicular al versor.

12. Problema trivial, un poco tedioso, pero clave para el resto de la materia: hallar el vector velocidad, el vector aceleración y la energía cinética de una partícula de masa m en coordenadas cilíndricas y esféricas. A modo de ayuda, en esféricas el primer paso consiste en escribir $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi) = r\,\hat{r}(\theta, \varphi)$.

13. Utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas, respectivamente, obtenga las ecuaciones de movimiento para un péndulo plano y para uno esférico.

14. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre una superficie definida paramétricamente por la función $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$, de manera que la posición de la partícula queda determinada por las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$. Además, hay un potencial externo $V(\mathbf{r})$.



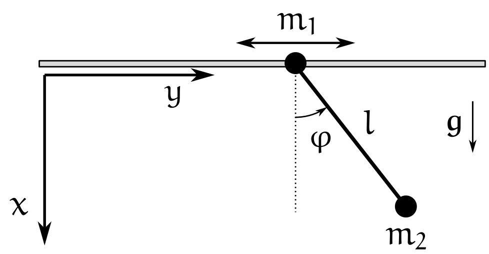
a) En cada punto de la superficie está definida una terna de vectores linealmente independientes: $\mathbf{A} = \partial \mathbf{r}/\partial\alpha$, $\mathbf{B} = \partial\mathbf{r}/\partial\beta$ y $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. ¿Qué relación geométrica guardan con la superficie los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$?

b) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de $\alpha(t)$, $\beta(t)$, de sus derivadas y de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y de sus derivadas respecto de α y de β.

c) Proyectando las ecuaciones de Newton sobre $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, encuentre las ecuaciones de movimiento para $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ y calcule la fuerza de vínculo.

d) Aplique los resultados anteriores a: un plano (en cartesianas y polares), una esfera, una superficie de revolución, un cono circular recto, un cilindro circular recto, un cilindro circular inclinado (la generatriz forma un ángulo λ con el plano de la base).

15. Dos partículas están unidas por una barra sin masa de longitud l. La partícula 1 está restringida a moverse sobre el eje y. La barra puede girar en el plano de la figura.



a) Escriba las ecuaciones de movimiento para $y(t)$ y $\varphi(t)$, esto es, la coordenada y de la partícula 1 y el ángulo que la barra forma con el eje x.

b) ¿Qué magnitudes se conservan?

c) Encuentre las fuerzas de vínculo en términos de y, φ y de sus derivadas.

d) Escriba la energía cinética de las dos partículas, $T(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi})$.

e) ¿Puede encontrar una superficie tal que la energía cinética de una partícula restringida a moverse sobre esta superficie esté dada por la misma expresión anterior? *Ayuda*: se tiene que poder parametrizar mediante un ángulo y una distancia.

f) Muestre que, eligiendo adecuadamente la energía potencial, el movimiento de esta partícula ficticia se rige por las mismas ecuaciones que las del sistema original. Esto sugiere que lo esencial del problema mecánico es la forma de la energía cinética.