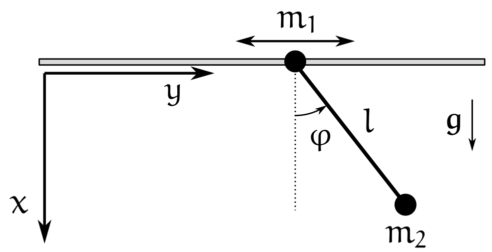
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

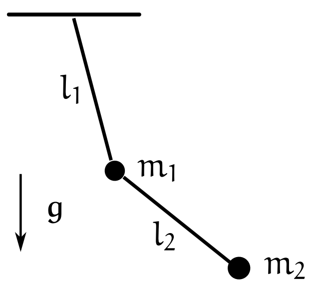
Guía 2: *Formulación lagrangiana.*

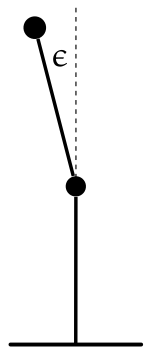
1. Dos partículas están unidas por una barra sin masa de longitud l. La partícula 1 está restringida a moverse sobre el eje y. La barra puede girar en el plano de la figura.



   a) Dar la posición de cada masa en función de las coordenadas generalizadas y y φ.
   b) A partir del principio de D'Alembert, encuentre las ecuaciones de movimiento.
   c) Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange. Compare con el *item* b).
   d) Encuentre constantes de movimiento.
   e) Para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable y bajo la condición de que la velocidad horizontal del centro de masa sea nula, resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema.

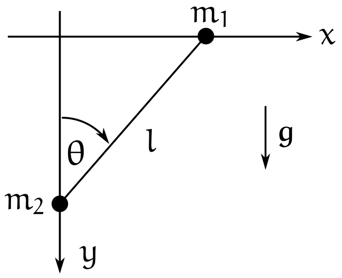
2. Considere un péndulo doble como muestra la figura de la izquierda.





   a) Defina coordenadas generalizadas.
   b) Escriba la posición de cada masa en términos de las coordenadas generalizadas.
   c) Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.
   d) Para $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$, halle una expresión aproximada de las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable. Calcule las frecuencias de los dos modos normales de oscilación. *Ayuda*: desacople las ecuaciones de movimiento definiendo combinaciones lineales de las coordenadas originales.
   e) En la figura de la derecha, el péndulo se mantiene levemente apartado de una de sus posiciones de equilibrio inestable. El segmento superior forma con la vertical un ángulo $\epsilon \ll 1$. Se libera el péndulo. Calcule la aceleración angular inicial de cada barra respecto de la vertical. Asuma que $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$.

3. Dos partículas, de masas m_1 y m_2, están unidas por una barra sin masa de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el eje y.



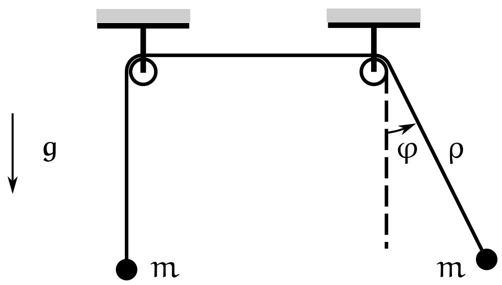
   a) Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el principio de D'Alembert.

   b) Escriba el lagrangiano y la ecuación de E-L para θ. Compare con el *item* a).

   c) Halle la tensión F en en la barra como función de θ y $\dot{\theta}$.

   d) Para valores de $\theta \ll 1$, ¿cuál es el período del movimiento?

4. Dos partículas de masa m están unidas por una cuerda sin masa suspendida de dos poleas de radio despreciable. La masa de la izquierda se mueve sólo verticalmente. La masa de la derecha puede moverse en todo el plano.



   a) Escriba el lagrangiano y encuentre las ecuaciones de E-L para ρ y φ.

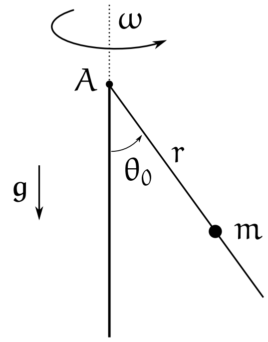
   b) Suponga que la masa de la izquierda está inicialmente en reposo, mientras que la masa de la derecha realiza oscilaciones de amplitud $\epsilon \ll 1$. ¿Cuánto vale, en promedio, la aceleración inicial de la masa de la derecha (promediada durante unos pocos períodos)? ¿En qué sentido se mueve?

5. Una partícula de masa m se desliza por un alambre fijo en el punto A y que forma un ángulo θ_0 con el eje vertical. El alambre rota con velocidad angular constante ω.

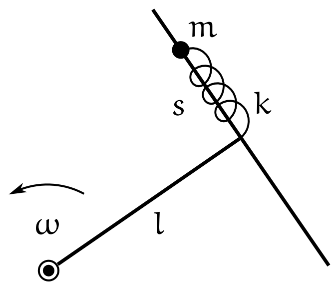
   a) Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.

   b) ¿Se conserva la energía?

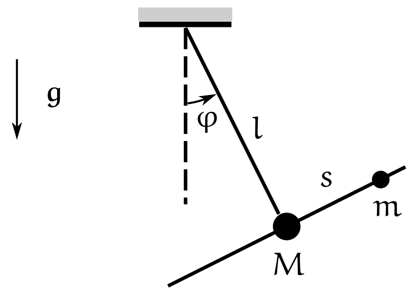
   c) ¿Se conserva la función $h(r, \dot{r})$?



6. Dos barras sin masa forman una T rígida. Un extremo de la primera barra está fijo al origen y todo el conjunto rota con velocidad angular ω en el plano de la figura. Una masa m se desliza a lo largo de la segunda barra. La masa está unida al punto de intersección de las barras mediante un resorte de constante k y longitud natural cero. Encontrar y resolver la ecuación de E-L para $s(t)$, donde s se mide sobre la segunda barra a partir del punto de intersección. ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la función $h(s, \dot{s})$? Existe un valor especial de ω; ¿cuál es y por qué es especial?

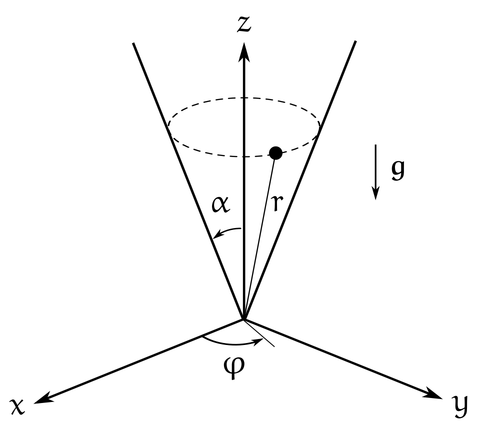


7. En el péndulo modificado de la figura, la masa m puede desplazarse a lo largo de una barra muy larga perpendicular a la barra principal del péndulo (m puede pasar a través de M). Las coordenadas generalizadas son φ y s. Encuentre las ecuaciones de E-L.



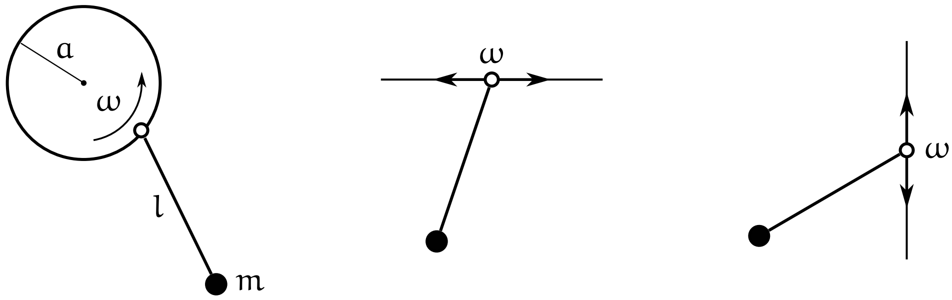
8. Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de E-L para un péndulo esférico. Encuentre constantes de movimiento.

9. Una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una superficie cónica, definida en coordenadas esféricas por $\theta = \alpha$. Escriba el lagrangiano y encuentre las ecuaciones de movimiento usando como coordenadas generalizadas el ángulo φ y el radio r de las coordenadas esféricas habituales. Hay gravedad.

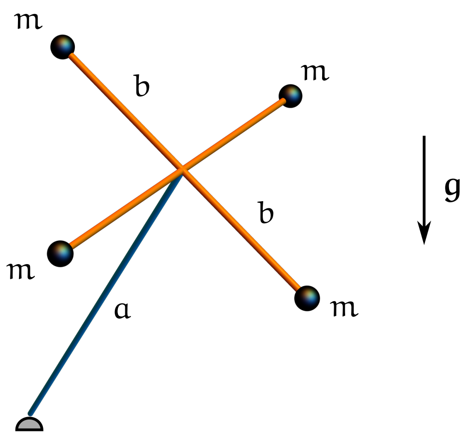


10. Escriba el lagrangiano de un péndulo plano cuyo punto de suspensión

   a) se desplaza uniformemente con frecuencia ω sobre un círculo vertical de radio a,
   b) efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a \cos \omega t$,
   c) efectúa oscilaciones verticales de la forma $a \cos \omega t$.



11. Una barra de longitud a tiene un extremo fijo al origen, alrededor del cual puede rotar sin restricciones. En el otro extremo de la barra se fijan por sus centros un par de barras, perpendiculares entre sí y a la primera barra. Las barras que forman la cruz tienen longitud $2b$. En los extremos de la cruz hay cuatro partículas de masa m. Hay gravedad.

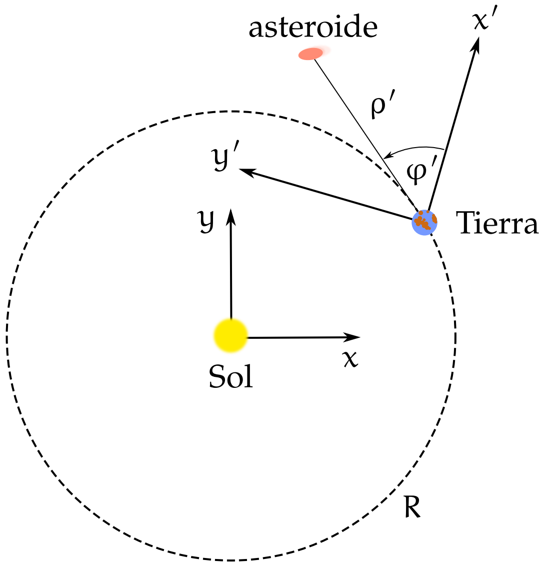


   a) Elija coordenadas generalizadas y escriba la posición de cada masa.
   b) Escriba el lagrangiano y encuentre las ecuaciones de E-L.
   c) Identifique constantes de movimiento.
   d) Reduzca el problema original a un problema unidimensional.

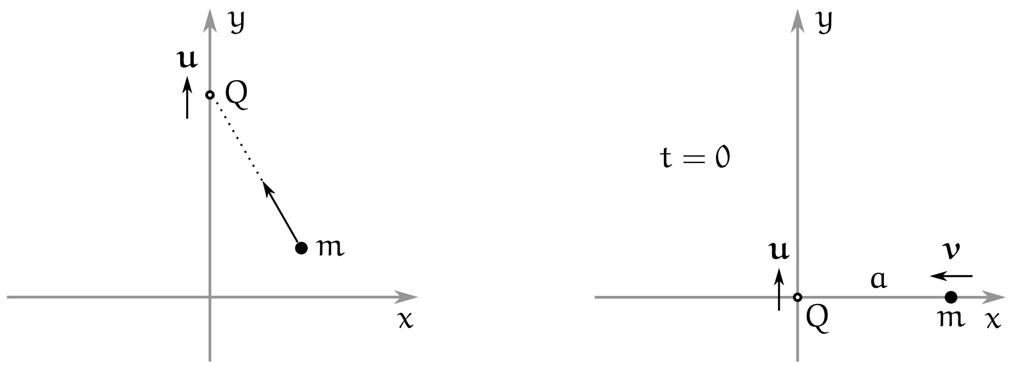
12. *Un pequeño objeto interestelar atraviesa el sistema solar a tan alta velocidad que puede considerarse como una partícula libre. El objetivo del problema es encontrar sus ecuaciones de movimiento cuando se usan como coordenadas generalizadas distancias y ángulos medidos desde la Tierra. Para eso, suponga que la Tierra se mueve alrededor del Sol en una órbita circular de radio R, con velocidad angular ω_1, y que, a su vez, rota alrededor de su eje con velocidad angular ω_2. Para simplificar, asuma que el eje de rotación de la Tierra es perpendicular al plano de su órbita y que el objeto interestelar

*https://en.wikipedia.org/wiki/Oumuamua

también se mueve sobre este plano. Para referencia, en $t = 0$ los ejes del sistema de referencia fijo a la Tierra coinciden con los ejes del sistema de referencia inercial fijo al Sol. Usando como coordenadas generalizadas las coordenadas polares asociadas al sistema de referencia fijo a la Tierra, ρ' y φ', escriba la posición del objeto, su lagrangiano y las ecuaciones de E-L. Note que, si bien las coordenadas generalizadas tienen una interpretación terrestre, el lagrangiano se sigue calculando usando la energía cinética referida al sistema inercial fijo al Sol. ¿Les será fácil a los astrónomos en la Tierra deducir que el objeto se mueve en línea recta? Sin revelar la solución, envíe la pregunta por carta a 100 astrónomos y analice sus respuestas.



13. **El problema de la persecución**. Un punto Q se mueve sobre el eje y según la ecuación $y(t) = ut$. Una partícula de masa m puede moverse sobre el plano xy, con la restricción de que en cada instante su velocidad tiene que estar dirigida hacia el punto Q.

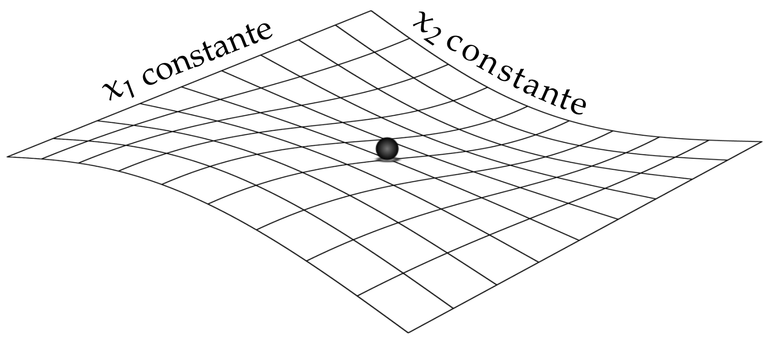


a) ¿Cuántas coordenadas se necesitan para especificar la posición de la partícula?
b) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
c) Escriba la ecuación de vínculo.
d) Encuentre las ecuaciones de movimiento a través del principio de D'Alembert.
e) Encuentre la trayectoria si la condición inicial es como en la figura de la derecha.
f) ¿Puede diseñar un modelo de este sistema que permita llevarlo a la práctica?

14. **Partícula en un campo magnético**. Una partícula de masa m y carga q está en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$.

    a) Si $\mathbf{A} = B_0 x\,\hat{y}$, compruebe que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, calcule las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son hélices. Las condiciones iniciales son $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.
    b) Repita el punto anterior, pero ahora para el potencial vector $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.
    c) Calcule la función ψ que da el cambio de medida $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$.

15. **Geodésicas sobre una superficie**. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre una superficie definida paramétricamente por la función $\mathbf{r}(x_1, x_2)$, de manera que la posición de la partícula queda determinada por las coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. No hay fuerzas externas.



    a) Muestre que la energía cinética de la partícula puede escribirse como
    $$T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \sum_{i,j} g_{ij}(x_1, x_2)\,\dot{x}_i\dot{x}_j, \tag{1}$$
    y dé las componentes de la matriz g_{ij}. Compare con la expresión para el elemento de línea sobre la superficie. Las cantidades g_{ij} son las componentes de lo que se conoce como tensor métrico.
    b) Escriba las ecuaciones de E-L para x_1 y x_2 en términos de los elementos de la matriz g_{ij} y de sus derivadas respecto de x_1 y x_2.
    c) Muestre que las ecuaciones de movimiento pueden quedar escritas en la forma
    $$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{ijk}(x_1, x_2)\,\dot{x}_j\dot{x}_k = 0,$$
    y dé las funciones Γ_{ijk} en términos de la matriz g_{ij} y de sus derivadas respecto de x_1 y x_2. (Si busca la definición formal de la ecuación geodésica, encontrará que algunos índices se escriben como subíndices y otros como supraíndices. No se alarme. A los fines del problema no es necesario prestar atención a esos detalles).

16. **Unicidad del lagrangiano**. Considere un oscilador isótropo bidimensional, $k_x = k_y \equiv k$.

    a) Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = y$.
    b) Sea $\mathcal{L}^*(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = m\dot{x}\dot{y} - kxy$. Halle las ecuaciones de movimiento para este lagrangiano. Compare con las obtenidas en a).