Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Guía 3: *Principios variacionales y simetrías.*

Principios variacionales

1. **Superficie de revolución de área mínima**

a) Dada una función $y(x)$ continua y dos veces derivable con continuidad, y tal que $y(\pm L) = 1$, escribir el área de la superficie de revolución que se genera al rotar el gráfico de la función $y(x)$ alrededor del eje x,

$$\mathcal{A}[y] = \int_{-L}^{L} dx\, F(y, y').$$

La función $F(y, y')$ puede ser considerada como el lagrangiano de un sistema mecánico, y el área $\mathcal{A}$ como la acción.

b) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben satisfacer las funciones $y(x)$ que extremen el área.

c) Note que F no depende explícitamente de x. ¿Cuál es la magnitud conservada asociada a esa simetría? Use esta magnitud para reducir en un grado la ecuación diferencial que satisfacen las funciones extremales.

d) Demuestre que las funciones extremales son de la forma $y(x, a) = (1/a)\cosh(ax)$.

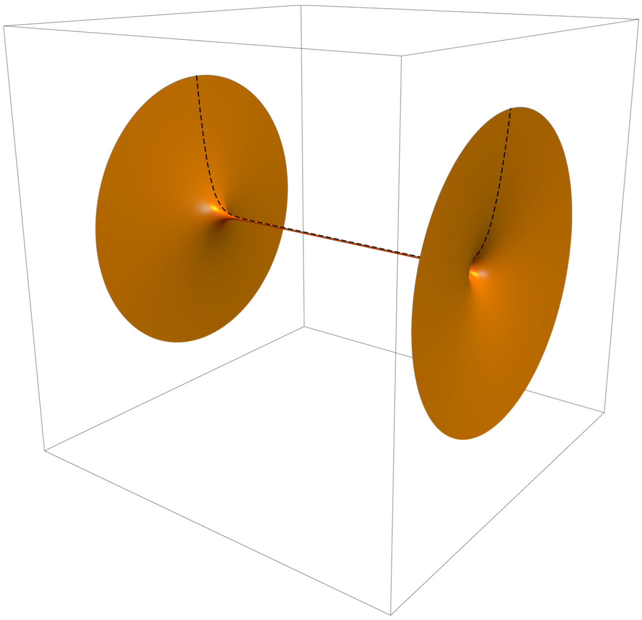
e) ¿Cuál es la ecuación que determina a?

f) Calcule explícitamente el área $\mathcal{A}\big(a(L)\big)$ de la superficie de revolución generada por $y\big(x, a(L)\big)$, asumiendo que a satisface la ecuación del *item* anterior.

g) Demuestre gráficamente que, dependiendo del valor de L, para a puede haber dos soluciones o ninguna. Escriba la ecuación que determina el valor del largo L^* que marca el límite entre una y otra situación. Encuentre numéricamente el valor de L^* con varias cifras significativas y búsquelo en Internet. ¿Qué nombre tiene esta constante y con qué otro problema de mecánica está relacionado?

h) En caso de haber dos soluciones para a, a lo sumo una de ellas puede ser la de área mínima. Para cada valor de L encuentre numéricamente las dos soluciones $a_1(L)$ y $a_2(L)$, usando la convención de que $a_1 \leqslant a_2$. Grafique las áreas $\mathcal{A}\big(a_1(L)\big)$ y $\mathcal{A}\big(a_2(L)\big)$. ¿A cuál de las dos soluciones corresponde el área mínima? ¿Es la respuesta independiente del valor de L?

i) Considere la línea quebrada $\sqcup$ que une los puntos $\{-L, 1\} \to \{-L, 0\} \to \{L, 0\} \to \{L, 1\}$. Este no es el gráfico de ninguna función $y(x)$ como las consideradas al escribir la ecuación de Euler-Lagrange. Sin embargo, al rotar $\sqcup$ alrededor del eje x se genera una superficie de revolución como muestra la figura (en un caso no tan extremo):



Su área es $\mathcal{A}_G = 2\pi$, independiente de L. Demostrar que para L suficientemente chica, $\mathcal{A}_G$ es mayor que el área asociada a las funciones $y(x, a(L))$, y viceversa.

j) Encontrar numéricamente el valor de L^{**} a partir del cual la curva $\sqcup$ da el área mínima. Mostrar que $L^{**} < L^*$, de modo que las extremales $y(x, a(L))$ pueden coexistir con la solución dada por $\sqcup$. La superficie generada por $\sqcup$ se conoce como solución de Goldschmidt .

k) Mientras $L < L^{**}$, una de las soluciones $y(x, a(L))$ es la de área mínima. Encontrar el radio de esta solución, $R \equiv y(0, a(L))$, cuando $L = L^{**}$.

2. **Catenaria**. Una cuerda uniforme, inextensible, de masa m y longitud ℓ está colgada con sus extremos fijos al eje x en $x = -L/2$ y $x = L/2$, respectivamente, Por supuesto $L \leqslant \ell$. Hay un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = -g\,\hat{z}$, con $g > 0$. La forma que adopta la cuerda, $z(x)$, es la que minimiza la energía potencial $V[z]$.

   a) Escribir la funcional $V[z]$ y la condición auxiliar para la longitud de la cuerda.

   b) Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, escribir la funcional que hay que extremar.

   c) Muestre que el lagrangiano asociado no depende explícitamente de x y que, por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a una ecuación de primer orden.

   d) Encuentre la solución de la ecuación de Euler-Lagrange para las condiciones del enunciado. Muestre que hay una sola extremal de este tipo.

   e) Muestre que en este caso la solución de Goldschmidt del problema anterior nunca aventaja a la solución continua y diferenciable encontrada en el *item* anterior.

3. Hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos de la superficie de un cilindro.

4. Una partícula se mueve en un potencial de tipo gravitatorio, $V(r) = -k/r$, con $k > 0$. Suponiendo que existan órbitas circulares centradas en el origen, utilizando el principio variacional de Hamilton encuentre la relación entre los períodos y los radios de tales órbitas. Para eso:

   a) Proponga variaciones alrededor de la órbita circular, $r(t) = a$ y $\varphi(t) = \omega t = 2\pi t/T$, parametrizando la órbita perturbada como:

   $$x(\theta) = a\cos\theta,$$

   $$y(\theta) = (a + \delta a)\sin\theta,$$

   $$\theta(t) = \omega t + \delta\theta \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right).$$

   Estas órbitas son elipses. El parámetro θ, útil para parametrizar las elipses, no es el ángulo φ, a menos que $\delta a = 0$. Notar que entre $t = 0$ y $t = T$, la partícula realiza una órbita completa, cuyo punto de partida y de llegada coincide con el de la órbita sin perturbar. Además, cuando $\delta\theta = 0$ y $\delta a = 0$, se recupera una órbita circular con $\dot{\varphi}$ constante.

   b) Escriba la acción entre los tiempos $t = 0$ y $t = T$ para la familia de órbitas perturbadas.

   c) Calcule la variación de la acción a primer orden en δa y $\delta\theta$.

   d) Si la órbita circular es un movimiento posible, entonces la variación calculada en el *item* anterior tiene que ser cero. A partir de esa condición encuentre el período T como función del radio a para estas órbitas hipotéticas.

5. Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa m en un potencial cuártico $V(x) = \beta x^4/4$. Se trata de encontrar una expresión aproximada para el período T como función de la energía E. Para eso:

   a) Considere la familia de funciones $x(t, A) = A\sin\omega t$, con $\omega = 2\pi/T$. Calcule la acción entre $t = 0$ y $t = T$ como función del parámetro A.

   b) Busque los extremos no triviales de la acción dentro de la familia de funciones $x(t, A)$. Esto da una relación entre A y T.

   c) Para la función que hace extrema la acción dentro de la familia $x(t, A)$, calcule la energía media $\bar{E}$ durante un período T.

   d) Finalmente, escriba T como función de $\bar{E}$. Compare con el resultado exacto:

   $$T(\bar{E}) = 2L\left(\frac{m^2}{\beta\bar{E}}\right)^{1/4},$$

   donde $L = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/4)/\Gamma(3/4) \approx 2{,}62206$ es la constante de la lemniscata.

6. *a*) Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(\mathbf{r})\, ds$, donde $n(\mathbf{r})$ es el índice de refracción del medio. Suponiendo que la luz se propaga en el plano xz, muestre que si $n(z) = (1{+}z/h)n_0$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $z = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde α y β son constantes de integración.

   b) Un problema inverso: ¿cuál debería ser la función $n(z)$ para que la trayectoria de los rayos sea un arco de circunferencia?

7. Cuando se arroja una partícula hacia arriba con velocidad inicial $v_0 > 0$ su trayectoria es $y(t) = v_0 t - gt^2/2$, y el tiempo que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra es $t_c = 2v_0/g$. Esos son resultados de Física 1, obtenidos con métodos de Física 1. El objetivo ahora es encontrar la trayectoria aplicando explícitamente el principio de Hamilton.

   Además de la forma del potencial, $U(y) = mgy$, la única información que debemos aportar es que la trayectoria parte de $y = 0$ en $t = 0$ y regresa a $y = 0$ en cierto $t_c > 0$. La trayectoria debe pertenecer entonces a la familia de funciones tales que $y(0) = y(t_c) = 0$. Asumiendo unas pocas hipótesis de continuidad, *todas* las funciones de este tipo pueden representarse mediante un desarrollo de Fourier en senos,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right), \tag{1}$$

   y por lo tanto es posible calcular la acción para cualquier trayectoria como función del conjunto de coeficientes a_n. El cálculo se simplifica notablemente debido a la linealidad del potencial y a las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{t_c} dt\ \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)\ \sin\left(\frac{k\pi}{t_c} t\right) = \delta_{kn}\frac{t_c}{2},$$

$$\int_0^{t_c} dt\ \cos\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)\ \cos\left(\frac{k\pi}{t_c} t\right) = \delta_{kn}\frac{t_c}{2},$$

   donde $n, k \geqslant 1$ y $\delta_{nk} = 1$ si $n = k$ y $\delta_{nk} = 0$ si $n \neq k$.

   a) Calcule explícitamente la acción para las funciones del tipo (1) en el intervalo entre $t = 0$ y t_c. El resultado quedará escrito como una serie infinita. Para calcular el término cinético, tendrá que usar las condiciones de ortogonalidad, de modo de eliminar una de las sumatorias.

   b) Derivando con respecto a cada coeficiente a_n, encuentre la condición de extremo y los coeficientes a_n^* que corresponden a esa trayectoria.

   c) Grafique la solución aproximada

$$y(t, N) = \sum_{n=1}^{N} a_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)$$

   para $N = 1, 2$, etc. y compare con el gráfico de la solución exacta.

d) Estime su grado de estupefacción (en radianes).

e) Insistimos: grafique la solución aproximada

$$y(t, N) = \sum_{n=1}^{N} a_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)$$

para $N = 1, 2$, etc. y compare con el gráfico de la solución exacta.

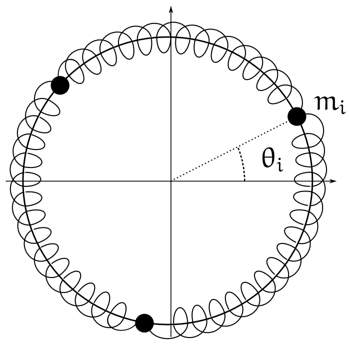
Simetrías

8. Demuestre a partir del principio de acción estacionaria que las ecuaciones de movimiento quedan inalteradas si al lagrangiano se le suma la derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.

9. Tres tristes masas, m_1, m_2 y m_3, están enhebradas en un aro circular fijo, como muestra la figura. Las masas interactúan a través de resortes, con potenciales

$$V(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{2} k (\theta_i - \theta_j)^2,$$

donde $i, j = 1, 2, 3$, y k es una constante. En base a la simetría del lagrangiano hallar qué magnitudes se conservan.



10. Indicar qué componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$ se conservan para el movimiento de una partícula en potenciales gravitatorios originados en las siguientes distribuciones homogéneas de masa (Goldstein 2nd ed. prob. 2-18; Landau 3rd ed. prob. 9-3):

a) Un elipsoide de revolución con semiejes $a = b \neq c$.

b) Una esfera.

c) Un plano infinito.

d) Un hilo infinito.

e) Un cilindro circular infinito.

f) Un cilindro cuadrado infinito.

g) Dos puntos de masa m.

h) Un semiplano.

i) Un cono.

j) Un toro circular.

k) Una hélice circular infinita. (Buscar una combinación de transformaciones que deje invariante el potencial. La cantidad conservada será una combinación de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$).

11. Dos partículas, de masas m_1 y m_2, interactúan con un potencial $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demuestre que para que se conserve el impulso angular es necesario que $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

12. Calcule las constantes de movimiento para una partícula en un campo electromagnético con potenciales:

a) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x, y)\,\hat{z}$.

b) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x^2 + y^2, z)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x^2 + y^2, z)\,\hat{z}$.

13. El lagrangiano de una partícula de masa m y carga e en un campo magnético uniforme que apunta en la dirección z es

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

a) Mostrar que el sistema es invariante ante cualquier traslación espacial y encontrar las magnitudes conservadas asociadas a esta simetría.

b) Mostrar que el sistema es invariante frente a rotaciones alrededor del eje z y encontrar la magnitud conservada asociada a esta simetría.

14. Una partícula se mueve en un potencial $V(\mathbf{x}, t)$ que rota con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$ respecto a un sistema inercial S. En el sistema S se definen coordenadas cartesianas x, y y z. A tiempo $t = 0$ el potencial es $V(\mathbf{x}, 0) = U(x, y, z)$.

a) ¿Cuál es el potencial en el sistema S para todo t? Escribe el lagrangiano en términos de las coordenadas y velocidades en este sistema. ¿Depende explícitamente del tiempo?

b) Un sistema S' rota con la misma velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ que el potencial y su origen y eje z coinciden con los de S. Escribe el lagrangiano en términos de las coordenadas y velocidades en S'. ¿Depende explícitamente del tiempo?

c) Si elegiste responder "Sí", pasa a la página 142. Si elegiste responder "No", continúa en el próximo *item*.

d) ¿Qué magnitud se conserva asociada a esta simetría? Escríbela en términos de las coordenadas y velocidades en S' y luego en términos de las coordenadas y velocidades en S.

e) ¿Cuál es en S la transformación de simetría asociada a este magnitud?

15. Considere el lagrangiano:
$$L(q, \dot{q}) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2 .$$
Muestre que existe una transformación de simetría que lleva a una cantidad conservada. Encuentre dicha cantidad conservada y proponga una interpretación física tanto para ella como para el lagrangiano.