

La mecánica clásica es muy simple

Dado un sistema de N partículas, posiblemente infinitas, el problema matemático de sus trayectorias queda definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad (1)$$

con condiciones iniciales $\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}$ y $\dot{\mathbf{r}}_i(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_{i0}$. Esto funciona muy bien si las fuerzas son todas conocidas, como en el movimiento planetario. Pero, por lo general, cada fuerza es la composición de dos clases de fuerzas: las aplicadas y las de vínculo,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ap})} + \mathbf{F}_i^{(\text{v})}. \quad (2)$$

Las fuerzas aplicadas, $\mathbf{F}_i^{(\text{ap})}$, se pueden expresar como funciones conocidas de las posiciones \mathbf{r}_i , y posiblemente de las velocidades. Las fuerzas de vínculo, $\mathbf{F}_i^{(\text{v})}$, son parte de las incógnitas del problema, aparecen para garantizar ciertas restricciones geométricas. Por ejemplo, consideremos estos dos sistemas:



En el primer caso, el bloque está obligado a moverse sin perder contacto con la superficie horizontal; su coordenada z es igual a cero. La fuerza normal \mathbf{N} , que puede tener tanto un sentido como el opuesto, contrarresta el efecto de cualquier fuerza aplicada que tienda a despegar el bloque de la superficie. En el segundo caso, la distancia entre las dos partículas es igual a ℓ , y se generan fuerzas de vínculo en la barra que las une. Las fuerzas de vínculo, \mathbf{N} , \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 no son conocidas. El problema debe incluir estas fuerzas entre sus incógnitas. Al mismo tiempo, las restricciones geométricas deben formar parte de sus ecuaciones:

$$\text{sistema mecánico} \rightarrow \begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ap})} + \mathbf{F}_i^{(\text{v})}, \\ + \\ \text{ecuaciones auxiliares de vínculo.} \end{cases} \quad (3)$$

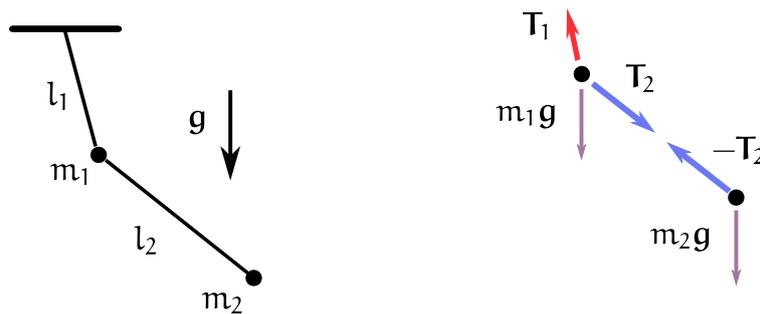
Las incógnitas son, querámoslo o no, las trayectorias $\mathbf{r}_i(t)$ y las fuerzas de vínculo. El interés principal suele estar puesto en las trayectorias, no en las fuerzas de vínculo. Cuando se quieren resolver las ecuaciones de movimiento, las fuerzas de vínculo son un estorbo.

Y existe otro problema. Cuando incluimos a las fuerzas de vínculo como parte de nuestras incógnitas, ¿qué nos asegura que las ecuaciones de Newton junto con las ecuaciones de

*Libro de quejas a su disposición: zanellaj@df.uba.ar

vínculo alcancen para despejar todas las incógnitas? El problema es real. Usualmente hace falta imponer condiciones extra. En tal situación, uno debería postular el mínimo número de hipótesis adicionales para que el problema matemático quede bien definido.

Veámoslo con un ejemplo. En el péndulo doble de la figura, las barras que sujetan a las partículas son rígidas y no tienen masa. Hay dos fuerzas de vínculo, \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 . En la figura, casi sin pensarlo, ya hemos introducido hipótesis suplementarias. Hemos supuesto que las fuerzas de tensión vienen de a pares. Escribimos \mathbf{T}_2 y $-\mathbf{T}_2$, y no una tercera tensión \mathbf{T}_3 en lugar de $-\mathbf{T}_2$. Esto no tiene relación con el principio de acción y reacción, porque las dos partículas no interactúan entre sí. La justificación es otra: debido a que las barras no tienen masa, si hubiera una fuerza neta sobre ellas, su aceleración sería infinita.



El problema mecánico consiste entonces en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m_1 \mathbf{g}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{T}_2 + m_2 \mathbf{g}, \\ |\mathbf{r}_1| = l_1, \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l_2. \end{cases} \quad (4)$$

¿Cuántas incógnitas tenemos? Si el movimiento ocurre en el plano de la figura, tenemos las cuatro componentes de las posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y las cuatro componentes de las fuerzas \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 . Eso da un total de ocho incógnitas. ¿Cuántas ecuaciones tenemos? Las dos primeras ecuaciones son vectoriales, así que cuentan en realidad como cuatro ecuaciones; las dos ecuaciones de vínculo son escalares, de manera que son, en efecto, sólo dos ecuaciones. El total de ecuaciones suma seis, dos menos que el total de incógnitas. ¡Caramba!

Seguramente (?) han resuelto este problema en Física 1 sin haberse encontrado con una dificultad parecida. ¿Qué es lo que ahora no estamos viendo? Es algo que dimos por hecho en la figura pero que no expresamos aún de manera formal: las tensiones no están en cualquier dirección; \mathbf{T}_1 es paralela a \mathbf{r}_1 y \mathbf{T}_2 es paralela a $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Esa información aún no ha sido incorporada al problema; forma parte de las hipótesis extra que mencionamos antes. Si las barras que unen a las partículas no tienen masa, se trata de hipótesis muy razonables, porque de otro modo tendríamos un torque neto sobre las barras y aceleraciones angulares infinitas. Entonces, al sistema de ecuaciones anterior hay que agregar estas otras dos:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = \lambda_1 \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{T}_2 = \lambda_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \end{cases} \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) en el sistema (4), el nuevo sistema queda así

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{r}_1 - \lambda_2 \mathbf{r}_2 + m_1 \mathbf{g}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \lambda_2 \mathbf{r}_2 - \lambda_2 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{g}, \\ |\mathbf{r}_1| = l_1, \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l_2. \end{cases} \quad (6)$$

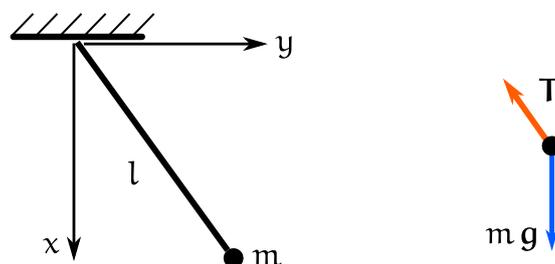
Las incógnitas son las cuatro componentes de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y los dos escalares λ_1 y λ_2 . Total: seis incógnitas. También hay seis ecuaciones: las dos primeras ecuaciones vectoriales suman cuatro, y las condiciones geométricas o de vínculo aportan las otras dos. Ahora sí podemos resolver el sistema, pero al costo de haber tenido que postular ciertas propiedades de las fuerzas de vínculo. El sistema tiene ahora tantas ecuaciones como incógnitas. Podríamos ir eliminando incógnitas hasta dejar una sola ecuación (complicadísima) para una sola incógnita. Pero en realidad esto es sólo una expresión de deseo.

La mecánica clásica no era tan simple

Bajemos un poco las aspiraciones y tratemos de encontrar las ecuaciones de movimiento de un sistema más sencillo: un péndulo simple que se mueve en un plano vertical. La idea de que todo problema mecánico se reduce a resolver ecuaciones diferenciales (que ya vimos que no es del todo cierta) suele ir asociada a la seguridad de que para resolver estas ecuaciones alcanza con escribir cada cosa en términos de sus componentes cartesianas. En libros antiguos, no sólo de mecánica, van a notar que lo primero son las componentes y que rara vez se escribe un vector como un ente en sí mismo.

Primer acercamiento al péndulo simple

Adoptaremos primero un enfoque netamente cartesiano que, aunque nos dé la sensación de método infalible, resultará bastante engorroso. La figura muestra al péndulo y a su diagrama de cuerpo libre.



El sistema de ecuaciones de partida es

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{r}} = m \mathbf{g} + \mathbf{T}, \\ |\mathbf{r}| = l. \end{cases} \quad (7)$$

Asumiendo que la tensión es de la forma $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{r}$, y escribiendo todo en sus componentes cartesianas x e y queda

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg + \lambda x, \\ m\ddot{y} = \lambda y, \\ x^2 + y^2 = l^2. \end{cases} \quad (8)$$

Eliminar λ es relativamente sencillo. Lo despejamos de la segunda ecuación y lo reemplazamos en la primera. Resulta entonces

$$m\ddot{x} = mg + m\frac{x}{y}\ddot{y}. \quad (9)$$

Mediante la ecuación de vínculo podemos eliminar x en términos de y (salvo una indefinición en el signo, que pasaremos por alto),

$$x = \sqrt{l^2 - y^2}. \quad (10)$$

De aquí se obtiene

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y}, \quad (11)$$

$$\ddot{x} = -\frac{y}{x}\ddot{y} - \frac{y^2}{x^3}\dot{y}^2 - \frac{\dot{y}^2}{x}. \quad (12)$$

Usando que $x^2 + y^2 = l^2$, los dos últimos términos pueden agruparse y resulta

$$\ddot{x} = -\frac{y}{x}\ddot{y} - \frac{l^2}{x^3}\dot{y}^2. \quad (13)$$

En todas estas expresiones se entiende que x debe escribirse en términos de y , como en la ec. (10). Volviendo a la ec. (9), obtenemos

$$-\frac{y}{x}\ddot{y} - \frac{l^2}{x^3}\dot{y}^2 = g + \frac{x}{y}\ddot{y}. \quad (14)$$

Reagrupando términos y usando nuevamente la condición de vínculo, resulta

$$\frac{l^2}{xy}\ddot{y} + \frac{l^2}{x^3}\dot{y}^2 + g = 0. \quad (15)$$

Finalmente, reordenando y reemplazando x por su expresión en términos de y ,

$$\ddot{y} + \frac{y\dot{y}^2}{l^2 - y^2} + \frac{g}{l^2}y\sqrt{l^2 - y^2} = 0. \quad (16)$$

Hemos llevado a cabo con éxito nuestro programa de eliminación de incógnitas y de reducción de todo el problema a una sola ecuación para una sola incógnita. Resuelta esta ecuación tendremos $y(t)$, y luego podremos calcular $x(t)$ y $\lambda(t)$. Pero ¿quién iba a decir que en coordenadas cartesianas la ecuación de movimiento del péndulo simple iba a tomar una forma tan complicada? Diez contra sencillo a que si le muestran la ec. (16) a cualquier físico no sabrá decirles a qué sistema corresponde.

Segundo acercamiento al péndulo simple

Pasemos entonces a un segundo enfoque: conservaremos la descomposición de los vectores en sus componentes cartesianas, pero elegiremos una parametrización de la posición que ya tenga en cuenta la condición de vínculo.

Es obvio que al estar sujetas por una barra de longitud l , las componentes x e y del vector \mathbf{r} no son independientes. Sin embargo, eso no quiere decir que tengamos que escribir una en términos de la otra, como hicimos antes. Querer eliminar x en términos de y o viceversa lleva a las desagradables cuentas de la sección anterior, con el agravante de que, dado y , no hay un único x posible, sino dos.

Podemos, más simplemente, introducir un nuevo parámetro, en términos del cual escribir de manera simultánea x e y . En este problema es evidente que un tal parámetro es el ángulo φ que forma la barra con el eje x . Si escribimos

$$\begin{aligned}x &= l \cos \varphi, \\y &= l \sin \varphi,\end{aligned}\tag{17}$$

de manera automática estaremos satisfaciendo la condición de vínculo $x^2 + y^2 = l^2$.

Retomemos la ecuación de movimiento a la altura de la ec. (9),

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} + m\frac{x}{y}\ddot{y}.\tag{18}$$

En términos de φ y de sus derivadas tenemos

$$\dot{x} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi,\tag{19}$$

$$\dot{y} = l\dot{\varphi} \cos \varphi,\tag{20}$$

y

$$\ddot{x} = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),\tag{21}$$

$$\ddot{y} = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).\tag{22}$$

Así resulta

$$-l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = g + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),\tag{23}$$

que de manera inmediata puede llevarse a la forma siguiente:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.\tag{24}$$

Esta ecuación es más familiar que el engendro (16).

Si bien los dos enfoques usaron la descomposición de los vectores según sus componentes cartesianas, el hecho de definir la posición de la partícula mediante un único parámetro, de modo tal que la restricción geométrica quedara automáticamente satisfecha, simplificó en gran medida las cuentas. En ambos casos fue necesario despejar la fuerza de vínculo antes de avanzar con las ecuaciones de movimiento. Para corregir esa situación, ahora llega un tercer enfoque.

Tercer acercamiento al péndulo simple

No hemos hecho ningún voto que nos obligue a usar una descomposición cartesiana de los vectores. Todo bien con Descartes, pero en lugar de proyectar las ecuaciones de movimiento sobre las direcciones x e y , podemos proyectarlas sobre una base de vectores que aisle la fuerza de vínculo sobre una sola dirección. Notar que en la ec. (8), la tensión aparece en las dos ecuaciones de movimiento, tanto en la dirección x como en la dirección y .

En el problema del péndulo simple, la ecuación $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ representa dos ecuaciones escalares. Una posibilidad, la única que hemos seguido hasta el momento, es tomar sus componentes cartesianas, es decir, escribir el par de ecuaciones escalares como

$$\begin{cases} \hat{x} \cdot m\ddot{\mathbf{r}} = \hat{x} \cdot \mathbf{F}, \\ \hat{y} \cdot m\ddot{\mathbf{r}} = \hat{y} \cdot \mathbf{F}. \end{cases} \quad (25)$$

Puesto que $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, y los versores \hat{x} e \hat{y} son constantes, resulta $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}$, y, en definitiva, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \end{cases} \quad (26)$$

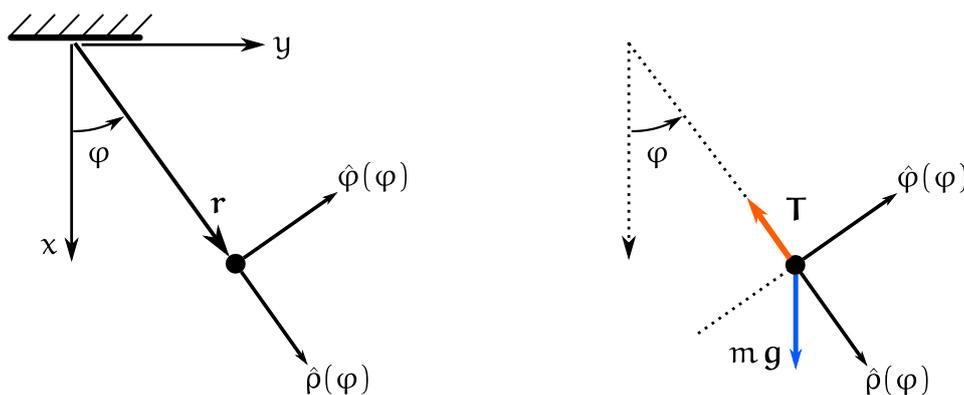
como debería resultar obvio. Esto es lo que hicimos hasta ahora. El único progreso al pasar del primer al segundo enfoque fue expresar las coordenadas x e y mediante un solo parámetro o coordenada, el ángulo φ .

Pero de igual modo serviría proyectar la ecuación vectorial $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ sobre direcciones independientes cualesquiera, \mathbf{s} y \mathbf{u} ,

$$\begin{cases} \mathbf{s} \cdot m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{u} \cdot m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}. \end{cases} \quad (27)$$

Los vectores \mathbf{s} y \mathbf{u} no tienen ni que ser ortogonales ni que tener módulo uno. Basta con que sean linealmente independientes. Pueden, además, depender de la propia posición \mathbf{r} .

Dijimos que conviene proyectar las ecuaciones de movimiento sobre direcciones que aislen a las fuerzas de vínculo. Muy naturalmente, para el péndulo simple esas direcciones son las de los versores $\hat{\rho}(\varphi)$ y $\hat{\phi}(\varphi)$, como muestra la figura.



La fuerza de vínculo sólo tiene componente en la dirección $\hat{\rho}(\varphi)$. Es decir,

$$\mathbf{T} = T \hat{\rho}(\varphi). \quad (28)$$

Dicho lo anterior, empecemos el problema desde cero, apartándonos lo más posible de las coordenadas cartesianas. Tenemos que resolver la ecuación

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}, \quad (29)$$

junto con el vínculo $|\mathbf{r}| = l$. Parametricemos la posición mediante el ángulo φ . Esto es,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = l\hat{\rho}(\varphi). \quad (30)$$

La dependencia de \mathbf{r} en t vendrá, primero, a través de la dependencia de \mathbf{r} en φ y, en última instancia, de la dependencia de φ en t , esto es,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\varphi}\mathbf{r}'(\varphi) = l\dot{\varphi}\hat{\rho}'(\varphi). \quad (31)$$

Necesitamos, pues, derivar los versores respecto de φ . Dejaremos eso para después (si la ansiedad es intolerable, ir a la pág. 14). De manera gráfica no es difícil convencerse de que

$$\hat{\rho}'(\varphi) = \hat{\varphi}(\varphi), \quad (32)$$

$$\hat{\varphi}'(\varphi) = -\hat{\rho}(\varphi). \quad (33)$$

Luego,

$$\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi), \quad (34)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = l[-\dot{\varphi}^2\hat{\rho}(\varphi) + \ddot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)]. \quad (35)$$

Con esto, la ecuación de movimiento se escribe como

$$m[-l\dot{\varphi}^2\hat{\rho}(\varphi) + l\ddot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)] = m\mathbf{g} + \mathbf{T}. \quad (36)$$

Proyectemos esta ecuación sobre las direcciones $\hat{\rho}(\varphi)$ y $\hat{\varphi}(\varphi)$,

$$\begin{cases} \hat{\rho}(\varphi) \cdot m[-l\dot{\varphi}^2\hat{\rho}(\varphi) + l\ddot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)] = \hat{\rho}(\varphi) \cdot m\mathbf{g} + \hat{\rho}(\varphi) \cdot \mathbf{T}, \\ \hat{\varphi}(\varphi) \cdot m[-l\dot{\varphi}^2\hat{\rho}(\varphi) + l\ddot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)] = \hat{\varphi}(\varphi) \cdot m\mathbf{g} + \hat{\varphi}(\varphi) \cdot \mathbf{T}. \end{cases} \quad (37)$$

Debido a que $\hat{\rho} \cdot \hat{\varphi} = 0$ y a que $\hat{\varphi} \cdot \mathbf{T} = 0$, queda

$$\begin{cases} ml\dot{\varphi}^2 = -\hat{\rho}(\varphi) \cdot m\mathbf{g} - T, \\ ml\ddot{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi) \cdot m\mathbf{g}. \end{cases} \quad (38)$$

Es obvio de las figuras que $\hat{\rho} \cdot \mathbf{g} = g \cos \varphi$ y que $\hat{\varphi} \cdot \mathbf{g} = -g \sin \varphi$. Así, finalmente,

$$\begin{cases} ml\dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi - T, \\ ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi. \end{cases} \quad (39)$$

Cada una de estas ecuaciones dice algo muy diferente. No necesitamos resolver la primera ecuación para resolver la segunda, que es la ecuación de movimiento propiamente dicha,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (40)$$

La primera ecuación debe pensarse como una ecuación para la tensión,

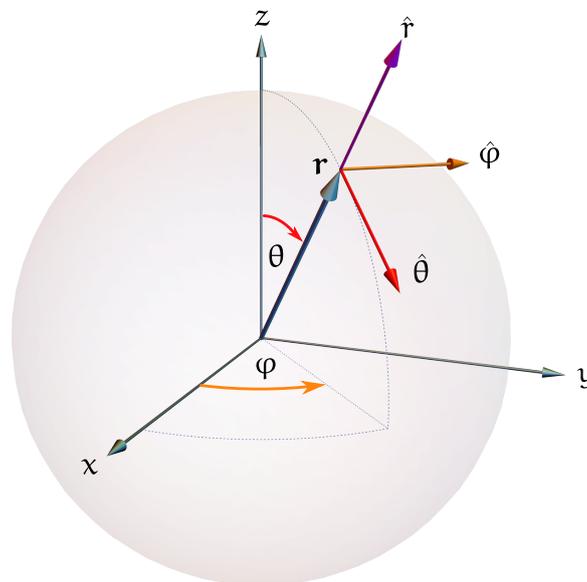
$$T = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi. \quad (41)$$

Lo más frecuente es que no nos interese calcular las fuerzas de vínculo. Entonces podemos dejar de lado este tipo de ecuaciones y concentrarnos en las ecuaciones de movimiento.

La mecánica clásica era más simple de lo que parecía

Ensayemos nuestro flamante método en un sistema mecánico más complicado. Es el mismo sistema del péndulo pero eliminando la restricción de movimiento sobre un plano. La partícula puede moverse ahora sobre la esfera de radio l . Este sistema se llama péndulo esférico. Convendrá utilizar coordenadas esféricas y proyectar la ecuación $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ sobre los versores asociados a estas coordenadas. La proyección sobre la dirección radial nos dará la tensión. Las proyecciones sobre las otras dos direcciones nos darán directamente las ecuaciones de movimiento, sin intervención de la tensión.

La representación usual de este sistema de coordenadas se muestra en la figura.



La posición de la partícula es

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi). \quad (42)$$

El ángulo θ se llama ángulo polar. Su dominio de definición debe permitir recorrer toda la esfera. La elección habitual es tomar $\theta \in [0, \pi]$. Para esta elección, el ángulo φ , llamado ángulo azimutal, debe barrer todo el círculo, de modo que $\varphi \in [0, 2\pi)$.

La ecuación de movimiento se escribe igual que antes, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$. Debido a que la distancia al origen r es contante y vale l , la velocidad y la aceleración están dadas por

$$\dot{\mathbf{r}} = l \left[\dot{\theta} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \right], \quad (43)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = l \left[\ddot{\theta} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \ddot{\varphi} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} + \dot{\theta}^2 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta^2} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta \partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (44)$$

Para calcular estas cantidades debemos derivar los versores respecto de θ y φ . Los pasos intermedios figuran al final de todo; el resultado es:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} = \cos \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\sin \theta \hat{\mathbf{r}} - \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{cases} \quad (45)$$

Así, la velocidad y la aceleración están dadas por

$$\dot{\mathbf{r}} = l(\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}), \quad (46)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = l \left[-(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} + (\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right]. \quad (47)$$

Con respecto a las fuerzas, la tensión es $\mathbf{T} = T \hat{\mathbf{r}}$, y la fuerza aplicada es $\mathbf{F}^{(ap)} = -mg\hat{\mathbf{z}}$. Para tener la descomposición de esta última en la base de los versores esféricos necesitamos las proyecciones de $\hat{\mathbf{z}}$ sobre estos versores:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0. \quad (48)$$

Al proyectar la ecuación $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ sobre los tres versores de esféricas, luego de unas simplificaciones triviales, obtenemos

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = \frac{g}{l} \cos \theta - \frac{T}{ml}, \quad (49)$$

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{g}{l} \sin \theta, \quad (50)$$

$$\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta = 0. \quad (51)$$

La primera es sencillamente una ecuación para la tensión T ; notar que sólo involucra a las variables y a sus derivadas primeras. Las ecuaciones de movimiento propiamente dichas son las dos últimas. Nuestro objetivo era escribir estas ecuaciones, de manera que, en lo que respecta al péndulo esférico, nos detendremos aquí.

Partículas moviéndose en lugares

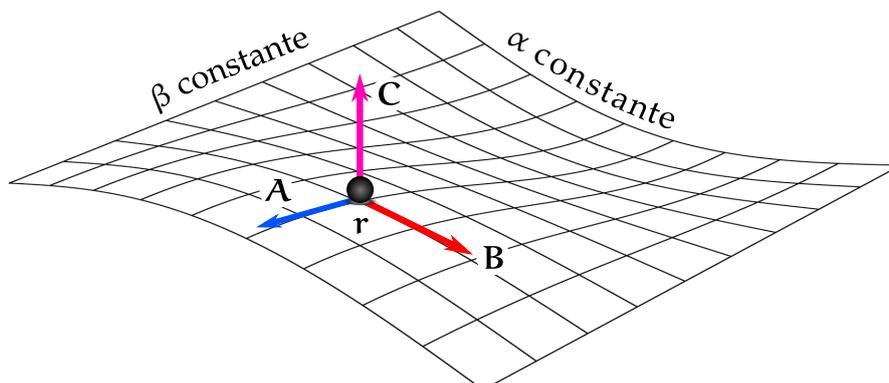
Las condiciones de vínculo, tanto sobre el péndulo plano como sobre el esférico, se expresaron mediante la ecuación $|\mathbf{r}| = l$. Estamos acostumbrados a pensar al péndulo como a una masa sujeta a una cuerda o a una barra rígida, pero a los fines del problema mecánico el péndulo plano es equivalente a una masa que se mueve sobre un círculo, y el péndulo esférico es equivalente a una masa obligada a moverse sobre la superficie de una esfera. En ambos casos la fuerza de tensión es reemplazada por una fuerza normal, digamos, \mathbf{N} . Siempre que podamos trataremos de pensar al problema como el de una partícula sobre una superficie.

Repasemos el método que empleamos con el péndulo esférico: como la partícula se movía sobre la superficie de una esfera, descompusimos la ecuación vectorial $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ en sus componentes según los vectores tangentes y normales a la esfera. Como la fuerza de vínculo estaba en la dirección normal, las proyecciones de la ecuación de movimiento sobre las direcciones tangentes no estuvieron entorpecidas por la presencia de la fuerza de vínculo, y así llegamos a las ecuaciones de movimiento para las coordenadas θ y φ .

La misma estrategia puede ser empleada para encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula que está obligada a moverse sobre una superficie cualquiera. Basta con proyectar la ecuación vectorial de movimiento, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, sobre tres direcciones independientes, teniendo el cuidado de que dos de esas direcciones sean tangentes a la superficie y de que la tercera dirección sea normal. La proyección de la ecuación $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ sobre esa dirección nos dará la fuerza normal, acerca de la cual podremos o no estar interesados. Más importantes son las otras dos ecuaciones, en las que no aparecerán otras fuerzas que no sean las fuerzas aplicadas, debido a que estas ecuaciones se obtienen proyectando sobre direcciones perpendiculares a la normal.

Supongamos que la superficie está dada por una función de dos variables, $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$. Existe una terna natural de vectores asociada a cada punto de la superficie: las derivadas de \mathbf{r} respecto de α y de β dan un par de vectores tangentes; el producto vectorial de estos dos vectores es, por lo tanto, normal a la superficie y completa la terna. Definimos así

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (52)$$



No nos interesa demasiado que estos vectores estén normalizados. Tampoco nos interesa que \mathbf{A} y \mathbf{B} sean ortogonales. Lo que nos importa es que sean linealmente independientes.

Aplicando la regla de la cadena, la velocidad de la partícula sobre la superficie será

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + \dot{\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \dot{\alpha} \mathbf{A} + \dot{\beta} \mathbf{B}, \quad (53)$$

y su aceleración,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\alpha} \mathbf{A} + \ddot{\beta} \mathbf{B} + \dot{\alpha} \dot{\mathbf{A}} + \dot{\beta} \dot{\mathbf{B}}. \quad (54)$$

Podríamos escribir de forma explícita las derivadas de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} respecto del tiempo pero, mientras no sepamos cómo va a terminar esto, es mejor no adelantarnos.

Si la fuerza externa aplicada es $\mathbf{F}^{(ap)}$, la proyección de la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{(ap)} + \mathbf{N} \quad (55)$$

sobre la dirección \mathbf{A} se lee como

$$\ddot{\alpha} A^2 + \ddot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \dot{\alpha} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{F}^{(ap)}}{m}. \quad (56)$$

Sigue ahora una serie de simplificaciones algebraicas. Para reescribir el tercer término de la ec. (56) podemos usar que

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \frac{dA^2}{dt}. \quad (57)$$

Por otro lado, si al segundo y cuarto término les sumamos $\dot{\beta} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}$ tendríamos la derivada respecto del tiempo de $\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Entonces sumemos y restemos el término que nos falta para tener esta derivada. Con todas estas cosas, volviendo a la ec. (56), el miembro de la izquierda se escribe así

$$\ddot{\alpha} A^2 + \frac{d}{dt} (\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{2} \dot{\alpha} \frac{dA^2}{dt} - \dot{\beta} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}. \quad (58)$$

Si el tercer término no contuviera el factor $\frac{1}{2}$, podríamos asociarlo con el primero y formar una derivada total. Sumando y restando lo que nos falta para poder hacer eso, se obtiene

$$\frac{d}{dt} (\dot{\alpha} A^2 + \dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \dot{\alpha} \frac{dA^2}{dt} - \dot{\beta} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}. \quad (59)$$

Escritos por extenso, los dos últimos términos son

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\alpha} \frac{dA^2}{dt} + \dot{\beta} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} &= \dot{\alpha} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} + \dot{\beta} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \frac{\partial A^2}{\partial \alpha} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \beta} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{B} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (60)$$

Pero

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta \partial \alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \alpha}. \quad (61)$$

Luego, la ec. (60) es igual a

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \frac{\partial A^2}{\partial \alpha} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 \frac{\partial B^2}{\partial \alpha}, \quad (62)$$

que todavía puede escribirse de manera más compacta como

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2 \right). \quad (63)$$

Si volvemos a la ec. (59), hacemos estos reemplazos e igualamos a la proyección de la fuerza, como en la ec. (56), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\alpha} A^2 + \dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2 \right) = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{F}^{(ap)}}{m}. \quad (64)$$

Nos gustaría poder escribir los dos términos entre paréntesis de la forma más parecida posible. Los dos primeros términos del segundo paréntesis son muy similares a los del primer paréntesis, sólo que falta un factor $\dot{\alpha}$ y sobra un factor $\frac{1}{2}$. Eso puede remediarse notando que

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\alpha} A^2 + \dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) \right]. \quad (65)$$

Más aún, podemos agregar aquí el término $\frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2$ sin que eso tenga ninguna consecuencia:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2 \right) \right]. \quad (66)$$

Finalmente, los dos paréntesis en la ec. (64) contienen las mismas cosas, y queda

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2 \right) m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{(ap)}. \quad (67)$$

La ecuación que resulta de proyectar sobre la dirección \mathbf{B} tiene la misma forma:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2 \right) m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}^{(ap)}. \quad (68)$$

El objetivo está cumplido. Dada la superficie $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$, tenemos todo lo necesario para calcular ambos miembros de las ecuaciones de movimiento. En la práctica necesitaremos escribir las ecuaciones de movimiento como figuran arriba. De nada vale, a nivel del cálculo, tratar de sintetizarlas más aún. Sin embargo, tiene interés ir un poco más allá.

Consideremos ambos miembros de las ecuaciones. No se necesita ser muy sagaz para ver que el término entre paréntesis es

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 A^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 B^2 = \frac{1}{2} \left| \dot{\alpha} \mathbf{A} + \dot{\beta} \mathbf{B} \right|^2 = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2. \quad (69)$$

Así, las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{(ap)}, \quad (70)$$

donde T es la energía cinética de la partícula,

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2. \quad (71)$$

Además, si la fuerza aplicada es el gradiente de un potencial $V(\mathbf{r})$, tenemos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{(\text{ap})} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}. \quad (72)$$

La ecuación (70) quedará escrita entonces como

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] T + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0. \quad (73)$$

Como el término con el potencial no depende de $\dot{\alpha}$, si le aplicamos el operador diferencial

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \quad (74)$$

el resultado será cero. De esta forma podemos asociar los dos términos de la ecuación bajo el mismo operador diferencial, y escribir

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] (T - V) = 0. \quad (75)$$

De manera análoga se escribe la ecuación de movimiento ligada a β .

Lo más frecuente es escribir estas ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (76)$$

donde la función \mathcal{L} , igual a $T - V$, recibe el nombre de lagrangiano.

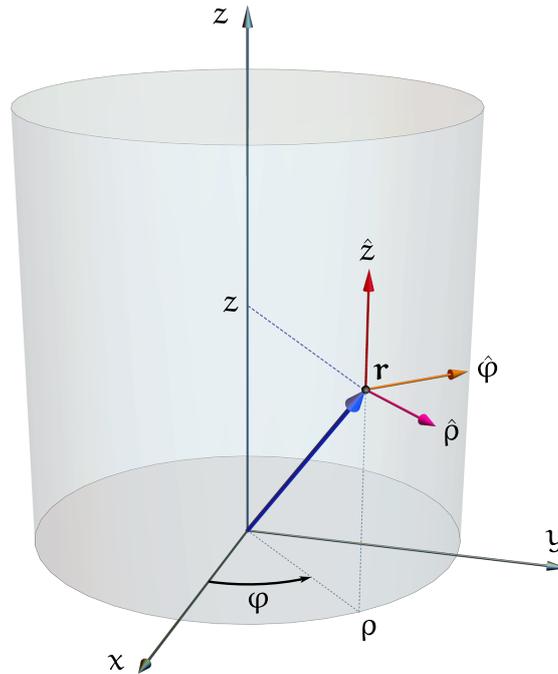
El lagrangiano ha aparecido aquí exclusivamente en relación al movimiento de una partícula sobre una superficie, pero pronto veremos que su dominio de aplicación es mucho más amplio. En otras palabras, encontraremos que casi cualquier problema mecánico es el problema de una partícula moviéndose en determinada superficie.

Con las ecs. (76) llegamos a una forma muy compacta de expresar las ecuaciones de movimiento. Su aspecto sencillo no debe engañarnos. Cuando queramos resolver un problema en particular, habrá que escribir todas las cosas en términos de α , β y de sus derivadas respecto del tiempo.

Extra: las derivadas de los versores

Tanto en el problema del péndulo simple como en el del péndulo esférico fue necesario calcular las derivadas de los versores respecto de sus variables angulares. La forma más sencilla de hacer eso es escribiendo todos los vectores en la base cartesiana. Con los resultados a la vista, es posible razonar geoméricamente sobre un dibujo el significado de cada relación. Con la práctica, estos razonamientos gráficos deberían resultar suficientes.

Empezaremos por las coordenadas cilíndricas.



En coordenadas cilíndricas la posición de un punto \mathbf{r} se especifica mediante las coordenadas ρ , z y φ , como muestra la figura anterior. Explícitamente,

$$\mathbf{r}(\rho, z, \varphi) = \rho \hat{\rho}(\varphi) + z \hat{z}. \quad (77)$$

En cada punto los versores son $\hat{\rho}(\varphi)$, \hat{z} y $\hat{\varphi}(\varphi)$. No es difícil ver que

$$\hat{\rho}(\varphi) = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}, \quad (78)$$

$$\hat{\varphi}(\varphi) = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}. \quad (79)$$

Sus derivadas respecto de φ son

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\rho}(\varphi) = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}, \quad (80)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\cos \varphi \hat{x} - \sin \varphi \hat{y}, \quad (81)$$

es decir,

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\rho}(\varphi) = \hat{\varphi}(\varphi), \quad (82)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\hat{\rho}(\varphi). \quad (83)$$

En coordenadas esféricas (ver la figura de la pág. 8) tenemos los siguientes tres versores, también fácilmente deducibles a través de un dibujo,

$$\hat{r}(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad (84)$$

$$\hat{\theta}(\theta, \varphi) = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}, \quad (85)$$

$$\hat{\varphi}(\varphi) = -\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}. \quad (86)$$

Sus derivadas respecto de θ son

$$\frac{d}{d\theta} \hat{r}(\theta, \varphi) = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}, \quad (87)$$

$$\frac{d}{d\theta} \hat{\theta}(\theta, \varphi) = -\sin \theta \cos \varphi \hat{x} - \sin \theta \sin \varphi \hat{y} - \cos \theta \hat{z}, \quad (88)$$

$$\frac{d}{d\theta} \hat{\varphi}(\varphi) = 0, \quad (89)$$

es decir

$$\frac{d}{d\theta} \hat{r}(\theta, \varphi) = \hat{\theta}(\theta, \varphi), \quad (90)$$

$$\frac{d}{d\theta} \hat{\theta}(\theta, \varphi) = -\hat{r}(\theta, \varphi), \quad (91)$$

$$\frac{d}{d\theta} \hat{\varphi}(\varphi) = 0. \quad (92)$$

Por otro lado, sus derivadas respecto de φ son

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{r}(\theta, \varphi) = -\sin \theta \sin \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y} = \sin \theta \hat{\varphi}(\varphi), \quad (93)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\theta}(\theta, \varphi) = -\cos \theta \sin \varphi \hat{x} + \cos \theta \cos \varphi \hat{y} = \cos \theta \hat{\varphi}(\varphi), \quad (94)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\cos \varphi \hat{x} - \sin \varphi \hat{y}. \quad (95)$$

El último vector no es tan fácil de leer en esféricas. Pero existe un método infalible: hacer su producto escalar con cada uno de los versores. Esto viene de que, para un vector cualquiera,

$$\mathbf{n} = (\hat{r} \cdot \mathbf{n}) \hat{r} + (\hat{\theta} \cdot \mathbf{n}) \hat{\theta} + (\hat{\varphi} \cdot \mathbf{n}) \hat{\varphi}. \quad (96)$$

Para el vector $d\hat{\varphi}/d\varphi$ tenemos

$$\hat{r}(\theta, \varphi) \cdot \frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\sin \theta, \quad (97)$$

$$\hat{\theta}(\theta, \varphi) \cdot \frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\cos \theta. \quad (98)$$

Obviamente, $\hat{\varphi} \cdot d\hat{\varphi}/d\varphi = 0$. Luego,

$$\frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\sin \theta \hat{r}(\theta, \varphi) - \cos \theta \hat{\theta}(\theta, \varphi). \quad (99)$$

Aunque no lo parezca, esta relación también puede razonarse gráficamente. En primer lugar, ya sabíamos que $\hat{\varphi}' = -\hat{\rho}$. Así que lo que necesitamos es descomponer al versor $\hat{\rho}$ en sus componentes en \hat{r} y $\hat{\theta}$. Si estamos sobre el ecuador de la esfera, \hat{r} coincide con $\hat{\rho}$, y si estamos sobre el polo norte es $\hat{\rho} = \hat{\theta}$. Como en la relación lineal que da $\hat{\rho}$ en términos de \hat{r} y $\hat{\theta}$ no puede haber otra cosa que senos y cosenos, es fácil ver que la única combinación lineal que en el ecuador y en el polo se reduce a lo que acabamos de decir es

$$\hat{\rho}(\varphi) = \sin \theta \hat{r}(\theta, \varphi) + \cos \theta \hat{\theta}(\theta, \varphi), \quad (100)$$

y de aquí se deduce (99). Con esto cubrimos la cuota de cien ecuaciones que nos exige la Secretaría Académica.

