

**Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019**  
**Clase práctica del jueves 15/8**

*Partículas en superficies. Espacio de configuración. Principio de D'Alembert.*  
*Problemas 14 y 15 de la Guía 1 y problema 1 de la Guía 2.\**

## Partículas en superficies

La clase pasada mostramos que las ecuaciones de movimiento de una partícula sobre una superficie se obtienen proyectando la segunda ley de Newton  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  sobre un par de direcciones tangentes a la superficie. Como se trata de un movimiento bidimensional, a través de la definición paramétrica de la superficie, que es una función  $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$ , la posición de la partícula queda determinada por las funciones  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$ . Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son las coordenadas generalizadas del problema. Luego de algunas manipulaciones, que en una primera exposición pueden resultar laboriosas, hallamos que las ecuaciones de movimiento se escriben muy sintéticamente como

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{(ap)}, \quad \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right] T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}^{(ap)}, \quad (1)$$

donde  $T$  es la energía cinética,  $\mathbf{F}^{(ap)}$  es la fuerza aplicada y donde

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta), \quad \mathbf{B}(\alpha, \beta) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Por su definición, los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  resultan ser tangentes a la superficie. Si la fuerza aplicada se deduce de un potencial  $V(\mathbf{r})$ , las ecuaciones se simplifican aún más:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}, \quad (3)$$

donde

$$\mathcal{L} = T - V. \quad (4)$$

Esta función recibe el nombre de lagrangiano. El lagrangiano es una función que depende de las coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$  y de sus derivadas,  $\dot{\alpha}$  y  $\dot{\beta}$ . En efecto: por un lado, la energía cinética se calcula como

$$T(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{1}{2} m \left| \dot{\mathbf{r}}(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) \right|^2, \quad (5)$$

donde

$$\dot{\mathbf{r}}(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \dot{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) + \dot{\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \dot{\alpha} \mathbf{A}(\alpha, \beta) + \dot{\beta} \mathbf{B}(\alpha, \beta). \quad (6)$$

Por otro lado

$$V = V(\mathbf{r}(\alpha, \beta)). \quad (7)$$

Así, escrito por extenso, con todas las variables a la vista, resulta

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{1}{2} m \left[ \dot{\alpha}^2 A^2(\alpha, \beta) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \mathbf{A}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{B}(\alpha, \beta) + \dot{\beta}^2 B^2(\alpha, \beta) \right] - V(\mathbf{r}(\alpha, \beta)). \quad (8)$$

---

\*Reclamos: zanellaj@df.uba.ar

Debe quedar claro que el lagrangiano ha aparecido aquí en el contexto del movimiento de una partícula sobre una superficie estática. No hemos deducido las ecuaciones de movimiento para el problema mecánico general, sino sólo para un caso especial. En este sentido, no nos hemos adelantado a las clases teóricas. Es llamativo que nuestras únicas hipótesis hayan sido la segunda ley de Newton y que la fuerza de reacción sea normal a la superficie. En ningún momento invocamos el principio de D'Alembert (que a esta altura ya deben haber visto) ni el principio de Hamilton. Dicho en otras palabras, sin usar otra cosa que la segunda ley de Newton y que postular una propiedad razonable sobre la fuerza de reacción, mostramos que el lenguaje natural para describir el movimiento de una partícula sobre una superficie es el de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que así es como se llaman las ecuaciones de la forma (3). Lo extraordinario, como verán después, o acaso ya hayan visto, es que ese lenguaje se adapte sin fisuras al problema mecánico general.

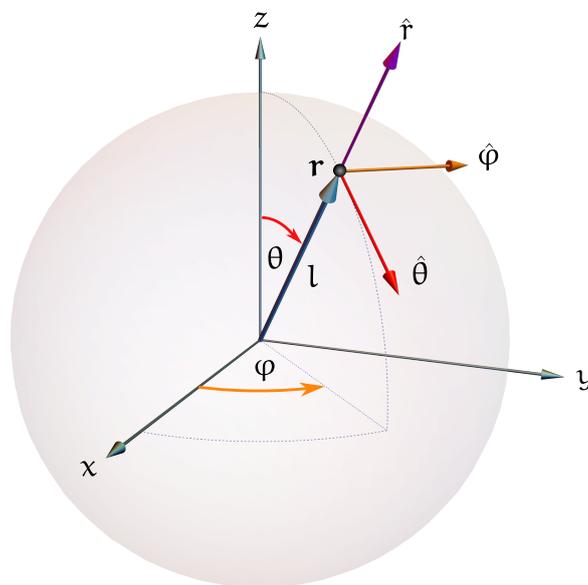
Siguen ahora algunos ejemplos de partículas moviéndose en superficies.

## Lugares de interés para llevar a pasear a tus partículas

### ■ Primer Lugar de Interés

**Una esfera.** Con un campo gravitatorio constante en la dirección  $z$ , este problema es equivalente al péndulo esférico. Si la esfera tiene radio  $l$ , la definición paramétrica de la superficie sobre la que ocurre el movimiento es

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = l \hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi). \quad (9)$$



Las coordenadas generalizadas son  $\theta$  y  $\varphi$ . La velocidad es

$$\dot{\mathbf{r}}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = l \left[ \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \varphi) + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}(\varphi) \right]. \quad (10)$$

Como los versores  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  son ortonormales, es muy fácil calcular  $|\dot{\mathbf{r}}|^2$ . Luego

$$T(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (11)$$

Por otro lado, tenemos la energía potencial

$$V(\theta, \varphi) = mgz(\theta, \varphi) = mgl \cos \theta. \quad (12)$$

Entonces,

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) - V(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta. \quad (13)$$

La ecuación asociada a  $\theta$  es

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \quad (14)$$

a partir de la cual rápidamente obtenemos que

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta. \quad (15)$$

La ecuación asociada a  $\varphi$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \quad (16)$$

es un poco más complicada de escribir. En primer lugar es

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = m\dot{\varphi} \sin^2 \theta. \quad (17)$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} (m\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = m(\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta). \quad (18)$$

Debido a que no hay ningún término en  $\mathcal{L}$  que dependa de  $\varphi$ , es  $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi = 0$ . Así resulta

$$\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (19)$$

Las ecs. (15) y (19) son las que obtuvimos la clase pasada para el péndulo esférico.

Dicho al margen: dada una función de muchas variables cuya derivada total respecto de  $t$  es cero, no necesitamos calcular explícitamente la derivada. La ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t), \dots) = 0 \quad (20)$$

no es tanto una ecuación diferencial como una manera complicada de decir que  $f$  es constante. En el ejemplo anterior, por caso, encontramos que

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0. \quad (21)$$

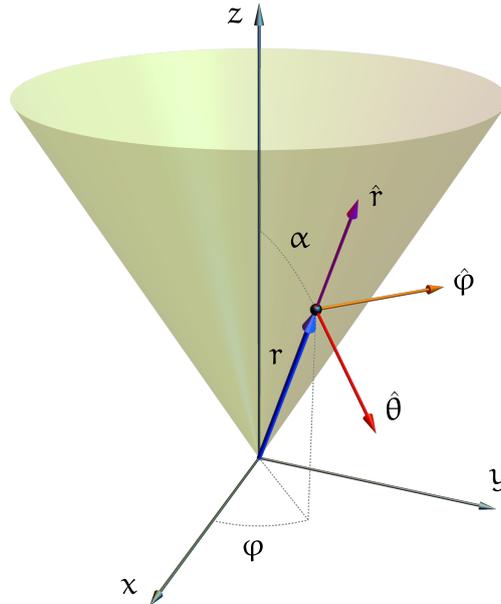
No necesitamos hacer las derivadas implícitas en esta ecuación; su solución está a la vista:

$$\dot{\varphi} \sin^2 \theta = \mathcal{C}. \quad (22)$$

No hace falta hacer el desarrollo explícito de la derivada que hicimos en la ec. (18). La ecuación puede quedar escrita como una ecuación de primer orden. Sólo si, una vez que estemos resolviendo las ecuaciones diferenciales, se vuelve necesario calcular  $\ddot{\varphi}$ , entonces derivaremos la ecuación anterior respecto del tiempo. Mientras no haga falta, está bien así.

## ■ Segundo Lugar de Interés

**Un cono.** Consideremos una partícula que se mueve sobre una de las ramas de un cono circular recto, sin fuerzas externas. Eligiendo el eje del cono según  $z$  y haciendo coincidir su vértice con el origen, el cono puede parametrizarse en coordenadas esféricas (en clase usamos coordenadas cilíndricas). Todos los puntos del cono comparten el mismo ángulo polar,  $\theta = \alpha$ . Si  $\alpha < \pi/2$ , el cono está invertido; si  $\alpha > \pi/2$ , el cono apunta hacia arriba; si  $\alpha = \pi/2$ , el cono degenera en el plano  $xy$ .



Los parámetros que definen la posición de cada punto son la distancia al origen  $r$  y el ángulo azimutal  $\varphi$ ,

$$\mathbf{r}(r, \varphi) = r \hat{\mathbf{r}}(\alpha, \varphi). \quad (23)$$

La velocidad es

$$\dot{\mathbf{r}}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \dot{r} \hat{\mathbf{r}}(\alpha, \varphi) + r \dot{\varphi} \sin \alpha \hat{\boldsymbol{\phi}}(\varphi). \quad (24)$$

En tanto la energía cinética resulta

$$T(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha). \quad (25)$$

Debido a que no hay fuerzas externas, el lagrangiano es la energía cinética. Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (26)$$

A partir de la ec. (25) obtenemos

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m\ddot{r}, \\ \frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Cancelando factores constantes, la ecuación asociada a  $r$  se escribe como

$$\ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha, \quad (29)$$

y la asociada a  $\varphi$  es

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (30)$$

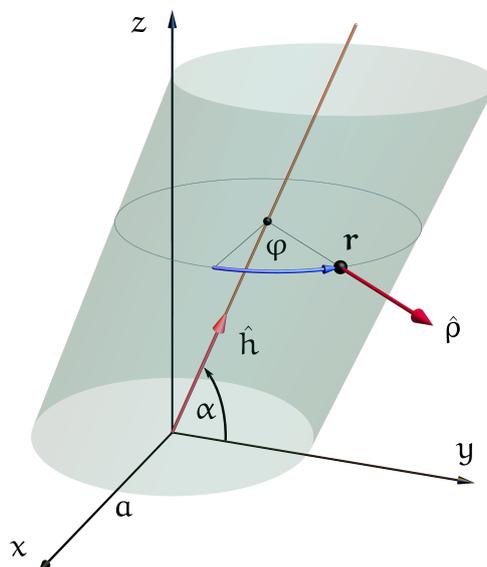
Estas ecuaciones pueden integrarse sin dificultad. Las soluciones son las curvas geodésicas.

### ■ Tercer Lugar de Interés

**Un cilindro oblicuo.** Consideremos un cilindro oblicuo circular de radio  $a$ , cuyo eje está en el plano  $yz$  y forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $y$ . No se trata de la Torre de Pisa: los planos paralelos al plano  $xy$  intersectan al cilindro en círculos de radio  $a$ . La dirección del eje es

$$\hat{h} = \cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}. \quad (31)$$

Podemos llegar hasta cualquier punto  $\mathbf{r}$  del cilindro moviéndonos primero a lo largo de  $\hat{h}$ , hasta llegar al centro del círculo sobre el que está el punto, y luego moviéndonos desde el centro del círculo hasta el punto de destino. Este último movimiento es según  $\hat{\rho}(\varphi)$ , y queda especificado dando el ángulo  $\varphi$  de las coordenadas polares.



Tendremos entonces

$$\mathbf{r}(\mathbf{h}, \varphi) = h \hat{\mathbf{h}} + a \hat{\rho}(\varphi). \quad (32)$$

Nuestras coordenadas generalizadas son  $h$  y  $\varphi$ . La velocidad de la partícula es

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{h}, \varphi, \dot{h}, \dot{\varphi}) = \dot{h} \hat{\mathbf{h}} + a \dot{\varphi} \hat{\rho}(\varphi). \quad (33)$$

Para escribir la energía cinética primero debemos calcular el módulo al cuadrado de la velocidad. Una regla práctica para calcular el módulo de una suma de vectores es mantenerse lo más vectorial posible, recurriendo sólo en última instancia a una descomposición específica. Así,

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \left[ \dot{h} \hat{\mathbf{h}} + a \dot{\varphi} \hat{\rho}(\varphi) \right] \cdot \left[ \dot{h} \hat{\mathbf{h}} + a \dot{\varphi} \hat{\rho}(\varphi) \right] = \dot{h}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + 2a \dot{h} \dot{\varphi} \hat{\mathbf{h}} \cdot \hat{\rho}(\varphi). \quad (34)$$

Recién aquí recurrimos a las descomposiciones cartesianas de  $\hat{\mathbf{h}}$  y  $\hat{\rho}$  para calcular el último producto escalar:

$$\hat{\mathbf{h}} \cdot \hat{\rho}(\varphi) = (\cos \alpha \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}) = \cos \alpha \cos \varphi. \quad (35)$$

Luego, la energía cinética es

$$T(\mathbf{h}, \varphi, \dot{h}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left( \dot{h}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + 2a \dot{h} \dot{\varphi} \cos \alpha \cos \varphi \right). \quad (36)$$

Dicho al margen: los vectores tangentes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  que hemos introducido en la discusión general son aquí

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial h} \left[ h \hat{\mathbf{h}} + a \hat{\rho}(\varphi) \right] = \hat{\mathbf{h}}, \quad (37)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ h \hat{\mathbf{h}} + a \hat{\rho}(\varphi) \right] = a \hat{\rho}(\varphi). \quad (38)$$

Por primera vez nos encontramos con un sistema de vectores tangentes no ortogonales; hasta ahora siempre había resultado  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Aquí es  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a \cos \alpha \cos \varphi$ .

Asumamos que hay una fuerza externa  $\mathbf{F}$ . Las ecuaciones de movimiento para  $h$  y  $\varphi$  se obtienen a partir de las ecuaciones (1), y son:

$$\ddot{h} + a \cos \alpha (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \hat{\mathbf{h}} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (39)$$

$$\ddot{h} \cos \alpha \cos \varphi + a \ddot{\varphi} = \hat{\rho}(\varphi) \cdot \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (40)$$

El motivo para haber elegido esta superficie entre otras muchas se verá más adelante.

Terminamos así nuestro recorrido por la mayoría de los Sitios de Interés propuestos en el problema 14 de la Guía 1.

## Si la Mecánica Clásica fuera tan simple

Las ecuaciones de movimiento de una partícula obligada a moverse sobre una superficie tienen una forma general especialmente sencilla. Una superficie en el espacio tridimensional queda definida por una función de dos parámetros, digamos,  $q_1$  y  $q_2$  (lo que antes llamamos  $\alpha$  y  $\beta$ ). Puesto que la posición de la partícula queda determinada por los valores de  $q_1$  y  $q_2$ , estos parámetros se denominan, con toda propiedad, coordenadas generalizadas. Las ecuaciones de movimiento tienen entonces la siguiente forma, ec. (3),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (41)$$

donde  $\mathcal{L} = T - V$  es una función que depende de las  $q_i$  y de sus derivadas,  $\dot{q}_i$ . [Recordar, sin embargo, que, más generalmente, las ecuaciones de movimiento son de la forma (1)].

Resultaría muy cómodo que toda la Mecánica Clásica se redujera a partículas sobre superficies. Hemos visto, por ejemplo, que el problema del péndulo esférico es equivalente al problema de una partícula sobre una esfera. Todos los problemas de una sola partícula con vínculos geométricos simples se reducen, en última instancia, al movimiento sobre superficies o curvas. Pero estos son casos triviales.

Lo esencial en el problema de la partícula sobre una superficie fue separar, por un lado, las fuerzas de vínculo y, por otro, las ecuaciones de movimiento. Recordemos que, en esta clase de problemas, había una base natural de vectores sobre la cual proyectar la ecuación  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ , de modo tal que el efecto de la fuerza de vínculo quedaba relegado a una ecuación de la que no dependía la solución de las ecuaciones de movimiento.

La pregunta que se plantea ahora es qué pasa si hay más de una partícula y ninguna superficie a la vista. ¿Cómo podemos aplicar las mismas ideas, por ejemplo, a un péndulo doble? El caso se complica porque hay dos fuerzas de vínculo y cada una define su propia dirección. En el problema de la partícula sobre la superficie, la fuerza de vínculo era una sola, lo que no dejaba lugar a ambigüedades. No es evidente, en el caso general, cómo definir una dirección normal (en algún sentido) a las fuerzas de vínculo.

Pero, si repasamos la discusión general del movimiento sobre una superficie, veremos que los cálculos nunca involucraron explícitamente la dirección normal a la superficie. Aunque definimos la terna  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , donde los dos primeros vectores son tangentes a la superficie y  $\mathbf{C}$  está en la dirección de la normal, a este último no le dimos ningún uso. Esto quiere decir que no es tan importante cuál es la dirección de la normal a la superficie sino cuál es la base de vectores tangentes a ella en cada punto.

El movimiento de una partícula sobre una curva ilustra este hecho. En este caso la base de vectores tangentes a la curva en cada punto consiste en un único vector. En cambio, la base de los vectores normales tiene dimensión 2, la dimensión del plano perpendicular a la curva en cada punto. No hay definida *una* normal. Sin embargo, como pueden comprobar por sí mismos, para obtener la ecuación de movimiento alcanza con proyectar la ecuación de Newton sobre la dirección tangencial.

Una cosa es cierta, si el problema de varias partículas pudiera reducirse al de una partícula sobre una superficie, esta superficie no estará en general definida en el espacio

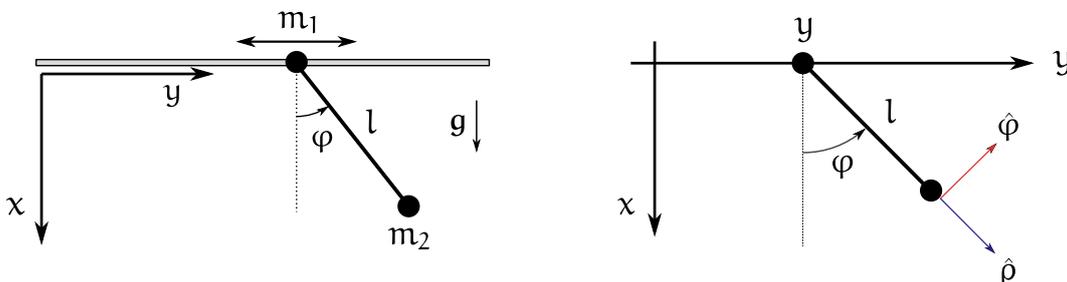
euclídeo de 3 dimensiones. Por ejemplo, se necesitan cuatro coordenadas generalizadas para describir la configuración de un péndulo doble en el espacio.

En lugar de meternos con un problema con cuatro coordenadas, veremos primero un sistema de dos partículas que puede describirse mediante dos coordenadas. Si en verdad pudiera encontrarse la equivalencia con un problema de una partícula sobre una superficie, esta superficie podrá visualizarse en el espacio tridimensional habitual.

Entonces, este es el programa: primero hallaremos las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos partículas con dos coordenadas. Luego haremos un comentario sobre la representación de un sistema mecánico mediante un punto en un espacio abstracto, el espacio de configuración. Finalmente, regresaremos al problema de las dos partículas para mostrar que en este espacio abstracto el punto representativo del sistema se mueve tal como lo haría una partícula sobre una superficie, que es lo que de verdad nos interesa.

## Dos es compañía

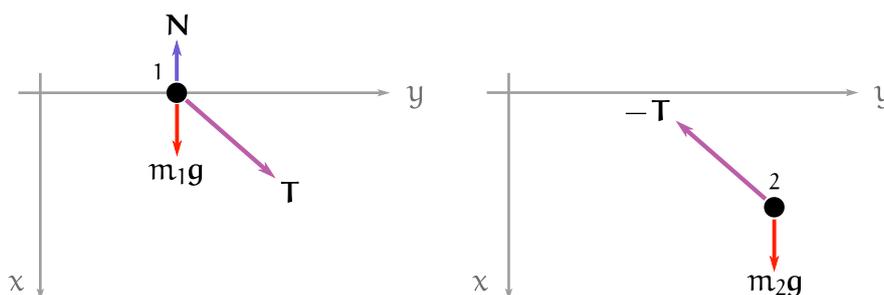
Para definir mejor estas cuestiones, vamos a considerar un sistema concreto de dos partículas. En principio, dos partículas requerirían 6 coordenadas, pero en este ejemplo su movimiento estará restringido de tal manera que será suficiente con 2 coordenadas generalizadas. Se trata del problema 15 de la Guía 1: dos partículas están unidas por una barra sin masa de longitud  $l$ . La partícula 1 está restringida a moverse sobre el eje  $y$ . La barra puede girar en el plano de la figura y hay gravedad.



Resulta evidente que, para dar la configuración del sistema, alcanza con informar la coordenada  $y$  de la primera partícula y el ángulo que la barra forma con el eje  $x$ . En efecto,

$$\mathbf{r}_1(y, \varphi) = y \hat{y}, \quad \mathbf{r}_2(y, \varphi) = y \hat{y} + l \hat{\rho}(\varphi). \quad (42)$$

Empezaremos desde cero, a partir de los diagramas de cuerpo libre y de las ecuaciones  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$ . En la siguiente figura se muestran las fuerzas aplicadas y las de vínculo.



Parte de nuestras hipótesis quedan expresadas en las siguientes elecciones:

$$\mathbf{N} = -N\hat{x}, \quad \mathbf{T} = T\hat{\rho}(\varphi). \quad (43)$$

Esto debe considerarse como un par de relaciones constitutivas que simplemente postulamos, así como postulamos que las fuerzas ejercidas en los dos extremos de la barra sean iguales y opuestas. En definitiva,

$$\mathbf{F}_1 = (m_1g - N)\hat{x} + T\hat{\rho}(\varphi), \quad \mathbf{F}_2 = m_2g\hat{x} - T\hat{\rho}(\varphi). \quad (44)$$

Notar que  $N$  y  $T$  forman parte de las incógnitas del problema.

Para escribir las ecuaciones de movimiento también necesitamos calcular las aceleraciones. A partir de las ecs. (42),

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{y}\hat{y}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{y}\hat{y} + l\dot{\varphi}\hat{\rho}(\varphi), \quad (45)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{y}\hat{y}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{y}\hat{y} + l[\ddot{\varphi}\hat{\rho}(\varphi) - \dot{\varphi}^2\hat{\rho}(\varphi)]. \quad (46)$$

En definitiva, las ecuaciones de Newton son

$$m_1\ddot{y}\hat{y} = (m_1g - N)\hat{x} + T\hat{\rho}(\varphi), \quad (47)$$

$$m_2\ddot{y}\hat{y} + m_2l[\ddot{\varphi}\hat{\rho}(\varphi) - \dot{\varphi}^2\hat{\rho}(\varphi)] = m_2g\hat{x} - T\hat{\rho}(\varphi). \quad (48)$$

Hay que elegir direcciones independientes sobre las cuales proyectar cada ecuación, de modo de obtener cuatro ecuaciones escalares para las cuatro incógnitas,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $T$  y  $N$ . Debido a que los parámetros del problema no están asociados a un único sistema de coordenadas (no son ni cartesianos ni polares), no hay una elección natural de las direcciones sobre las cuales hacer las proyecciones. Lo que sirve de guía es que las fuerzas de vínculo están en las direcciones de  $\hat{x}$  y  $\hat{\rho}$ . De modo que, en el mismo espíritu de lo que hicimos al resolver el problema de la partícula sobre la superficie, podríamos ver qué pasa si proyectamos las ecuaciones sobre las direcciones perpendiculares a cada fuerza, es decir,  $\hat{y}$  y  $\hat{\phi}$ .

Si proyectamos la ec. (47) sobre las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{\phi}$  obtenemos

$$m_1\ddot{y} = T \sin \varphi, \quad (49)$$

$$m_1\ddot{y} \cos \varphi = -(m_1g - N) \sin \varphi. \quad (50)$$

A su vez, proyectando la ec. (48) sobre las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{\phi}$  resulta

$$m_2\ddot{y} + m_2l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -T \sin \varphi, \quad (51)$$

$$m_2\ddot{y} \cos \varphi + m_2l\ddot{\varphi} = -m_2g \sin \varphi. \quad (52)$$

Usando aquí la ec. (49) y reagrupando, queda, finalmente,

$$\ddot{y} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0, \quad (53)$$

$$\ddot{y} \cos \varphi + l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi. \quad (54)$$

Notar que no hemos necesitado usar la ec. (50) para llegar a las ecuaciones de movimiento. La ec. (50) determina  $N$  en función de  $y(t)$  y  $\varphi(t)$ . Tanto da calcularla o no.

## El espacio de configuración

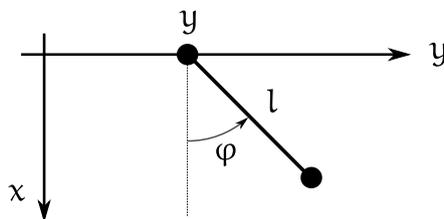
El lugar al que queríamos llegar es a la cuestión de si las ecs. (53) y (54) son equivalentes a las ecuaciones de una partícula moviéndose sobre cierta superficie. Si esto fuera así, estaríamos más cerca de convencernos de que incluso los problemas de varias partículas son equivalentes a los de una sola partícula sobre una superficie, acaso en un espacio de más de tres dimensiones.

Si se necesitan  $n$  números para informar la configuración de un sistema mecánico, cada configuración puede ser representada por un punto en un espacio  $n$ -dimensional, llamado espacio de configuración. En el caso de  $N$  partículas sin vínculos, si se usan coordenadas cartesianas, este espacio es simplemente el espacio euclídeo de  $3N$  dimensiones necesario para representar los  $N$  vectores  $\mathbf{r}_i$ . Si  $N = 1$ , el espacio de configuración coincide con el espacio real. En general, cada punto en el espacio de configuración representa un estado del sistema, y la evolución del sistema corresponde entonces a una curva que sigue el punto representativo en el espacio de configuración.

Si a las  $N$  partículas se agregan vínculos, no todas las configuraciones que eran accesibles en un principio serán accesibles bajo la acción de los vínculos. Por ejemplo, el espacio de configuración de 3 dimensiones de una partícula libre, en coordenadas cartesianas, se ve reducido a la superficie de una esfera si se impone el vínculo de que la partícula se mantenga a una distancia fija del origen. Cada vínculo holónomo reduce en una dimensión el espacio de configuración. Por comodidad uno puede visualizar la región permitida de movimiento como un subespacio de menor dimensión inmerso en el espacio de configuración correspondiente al movimiento sin vínculos. Así, es cómodo pensar al péndulo esférico como a una partícula obligada a moverse sobre una superficie inmersa en el espacio tridimensional, y no como a una partícula que se mueve en el plano  $\theta\phi$ .

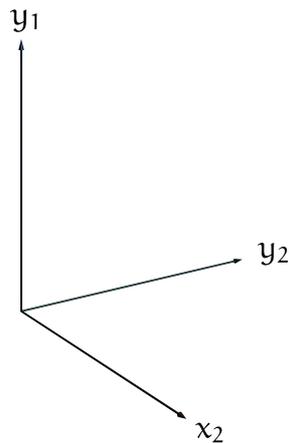
La analogía que deseamos formular consiste en decir que el movimiento del punto representativo del sistema en el espacio de configuración  $n$ -dimensional se rige por ecuaciones que son una generalización de las ecuaciones de movimiento de una partícula sobre una superficie. Lo mínimo que deberíamos hacer para sostener esta analogía es encontrar un ejemplo que la haga plausible.

El ejemplo al que recurriremos es el del sistema de dos partículas de la sección anterior.



El espacio de configuración de dos partículas tiene en principio 6 dimensiones. Vayamos agregando poco a poco los vínculos. Si restringimos a las partículas a moverse sobre el plano  $xy$ , la dimensión del subespacio en el que se mueven se reduce a 4. Si se restringe a la primera partícula a moverse sobre el eje  $y$ , el subespacio de movimiento se reduce a un espacio de 3 dimensiones. Si nos detuviéramos aquí, sería fácil representar las cosas

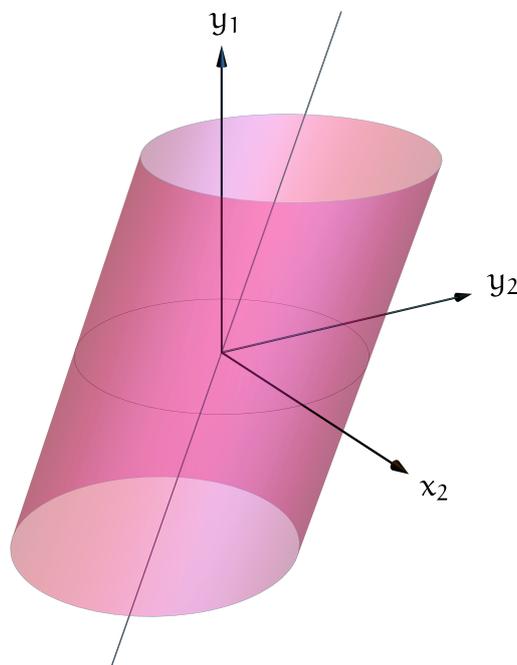
de manera gráfica. En este espacio de configuración restringido a 3 dimensiones podemos usar como coordenadas  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$ , como muestra la figura.



Teniendo en cuenta que existe el vínculo adicional que mantiene fija la distancia entre las dos partículas, en este espacio de 3 dimensiones el punto representativo del sistema no puede ocupar cualquier posición. La condición que expresa que la distancia entre las dos partículas es  $l$  queda escrita como

$$x_2^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2, \quad (55)$$

lo que define una superficie bidimensional. ¿Pero cuál? Para  $y_1 = y$ , fijo, la expresión (55) es la ecuación de un círculo de radio  $l$  en el plano  $y_1 = y$ , centrado en la posición  $x_2 = 0$  e  $y_2 = y$ . Variando continuamente  $y$  generaremos el cilindro que muestra la figura.



El hecho de que la configuración del sistema quede especificada mediante un ángulo y una distancia debió sugerirnos que este sería el tipo de superficie en la cual se mueve el punto representativo. Un ángulo y una distancia es la clase de parametrización propia de los cilindros.

No fue arbitrario que el Último Sitio de Interés que visitamos al considerar partículas en superficies haya sido un cilindro oblicuo. Las ecuaciones de movimiento que obtuvimos entonces son las ecs. (39) y (40), que repetimos aquí abajo con leves modificaciones,

$$\ddot{h} + a \cos \alpha (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \hat{h} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (56)$$

$$\ddot{h} \cos \varphi + \frac{a}{\cos \alpha} \ddot{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi) \cdot \frac{\mathbf{F}}{m \cos \alpha}. \quad (57)$$

Si comparamos estas ecuaciones con las ecuaciones de movimiento del sistema de las dos partículas, ecs. (53) y (54), también copiadas aquí abajo,

$$\ddot{y} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0, \quad (58)$$

$$\ddot{y} \cos \varphi + l \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi, \quad (59)$$

encontraremos una gran similitud.

Recordemos que las ecs. (56) y (57) son las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve sobre la superficie de un cilindro oblicuo, cuyo eje está en el plano  $yz$ , en la dirección del versor  $\hat{h} = \cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}$ . Si elegimos la fuerza  $\mathbf{F}$  en una dirección normal a  $\hat{h}$ , la ec. (56) tomará la misma forma que la ec. (58), siempre que sean hechas las siguientes identificaciones

$$h = y, \quad a \cos \alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l. \quad (60)$$

A su vez, para que las ecs. (59) y (57) coincidan, debe ser

$$\frac{a}{\cos \alpha} = l, \quad \hat{\varphi} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m \cos \alpha} = -g \sin \varphi. \quad (61)$$

La primera de estas ecuaciones junto con la segunda de las ecs. (60) implican

$$\cos^2 \alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad a = l \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (62)$$

Falta resolver la forma de la fuerza  $\mathbf{F}$ . Dijimos que  $\mathbf{F}$  tiene que ser perpendicular a  $\hat{h}$ . Una base de vectores normales a  $\hat{h}$  está compuesta por el versor  $\hat{x}$  y el versor

$$\hat{\tau} = -\sin \alpha \hat{y} + \cos \alpha \hat{z}. \quad (63)$$

De modo que si  $\mathbf{F}$  es perpendicular a  $\hat{h}$  entonces debe ser una combinación lineal de estos vectores:

$$\mathbf{F} = f_x \hat{x} + f_\tau \hat{\tau}. \quad (64)$$

Queremos que se cumpla la segunda ec. (61), lo que, teniendo en cuenta que  $\hat{x} \cdot \hat{\varphi} = -\sin \varphi$  y  $\hat{\varphi} \cdot \hat{\tau} = -\sin \alpha \cos \varphi$ , implica

$$-f_x \sin \varphi - f_\tau \sin \alpha \cos \varphi = -mg \cos \alpha \sin \varphi. \quad (65)$$

Entonces debemos pedir

$$f_x = mg \cos \alpha, \quad f_\tau = 0. \quad (66)$$

En otras palabras,

$$F = mg \cos \alpha \hat{x}, \quad (67)$$

que es la fuerza de un campo gravitatorio constante en la dirección  $x$ .

Esto cierra la analogía. Las coordenadas que describen al sistema de las dos partículas tienen las mismas ecuaciones de movimiento que aquellas que determinan la posición de una partícula sobre la superficie de un cilindro oblicuo en un campo gravitatorio constante. El punto representativo en un espacio de configuración que tiene la geometría de un cilindro oblicuo se mueve de la misma manera que una partícula sobre un cilindro oblicuo.

No podemos sacar de esto ninguna demostración general, pero sí un entendimiento más intuitivo de por qué las ecuaciones de Euler-Lagrange valen para toda una clase de sistemas mecánicos. Por un lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange son el lenguaje natural para describir el movimiento de partículas sobre superficies. Y, por otro lado, existe una clase de sistemas mecánicos que pueden ser representados como un punto sobre cierta superficie en un espacio  $n$ -dimensional. De una idea a la otra hay sólo un paso.

## Tu energía te condena

Antes de terminar con estas cuestiones, fijémonos en una última cosa. La energía cinética en el problema de las dos partículas es

$$T(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi} \cos \varphi). \quad (68)$$

Comparemos con la energía cinética de la partícula sobre el cilindro oblicuo, ec. (36),

$$T(h, \varphi, \dot{h}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{h}\dot{\varphi} \cos \alpha \cos \varphi). \quad (69)$$

Repitiendo las identificaciones anteriores, en particular,

$$h = y, \quad a \cos \alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad a^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l^2, \quad (70)$$

y pidiendo además que  $m_1 + m_2 = m$ , pueden verificar que las dos energías cinéticas coinciden. No habíamos necesitado decir nada sobre  $m$ . Vemos ahora que si buscamos la equivalencia de los problemas, no sólo en sus ecuaciones de movimiento sino también en las expresiones de sus energías cinéticas, el valor de  $m$  queda asimismo determinado.

¿Qué sucede con el potencial del que se deducen las fuerzas aplicadas? En el problema de las dos partículas este potencial es

$$V(y, \varphi) = -m_2 gl \cos \varphi. \quad (71)$$

En el problema del cilindro oblicuo la fuerza (67) se obtiene a través del potencial

$$U(\mathbf{r}) = -mgx \cos \alpha = -mga \cos \alpha \cos \varphi. \quad (72)$$

Pero, de acuerdo a la segunda ec. (70), debe ser entonces

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \lg \cos \varphi. \quad (73)$$

Igual que con las energías cinéticas, los potenciales  $U$  y  $V$  coinciden si  $m = m_1 + m_2$ .

Lo interesante aquí es que dos sistemas muy distintos, pero cuyas energías cinéticas y potenciales se escriben del mismo modo, tienen las mismas ecuaciones de movimiento. Es decir, en el problema de las dos partículas, como ustedes pueden verificar, es posible obtener las ecuaciones de movimiento a través de las mismas operaciones que conducen a las ecuaciones de movimiento de una partícula sobre el cilindro oblicuo:

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ T(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) - V(y, \varphi) \right] = 0, \quad (74)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left[ T(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) - V(y, \varphi) \right] = 0. \quad (75)$$

Ya sabrán que esto no es coincidencia. Es el lagrangiano el que determina las ecuaciones de movimiento. Lagrangianos iguales producen ecuaciones de movimiento iguales.

## And Now for Something Completely Different

Reobtendremos las ecuaciones de movimiento para el sistema de las dos partículas de las secciones anteriores, pero adoptaremos un camino menos visual y más analítico, tal como querría el tano Lagrange<sup>†</sup>. Este método de solución no llegó a ser expuesto en clase; corresponde al problema 1 de la Guía 2.

### Aplicación del principio de D'Alembert

El principio de D'Alembert establece que el trabajo de las fuerzas de vínculo durante un desplazamiento virtual es nulo. Este postulado generaliza la idea de que las fuerzas de vínculo son, en algún sentido, perpendiculares al movimiento del sistema, ya se trate de una partícula o de varias.

Las ecuaciones de movimiento para un sistema de  $M$  partículas son de la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(ap)} + \mathbf{F}_i^{(v)}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (76)$$

Las fuerzas aplicadas,  $\mathbf{F}_i^{(ap)}$ , se pueden expresar como funciones conocidas de las posiciones  $\mathbf{r}_i$ , y posiblemente de las velocidades. Las fuerzas de vínculo,  $\mathbf{F}_i^{(v)}$ , son parte de las incógnitas del problema; existen para garantizar ciertas restricciones geométricas. Si se calcula el producto escalar de cada una de las ecs. (76) con el correspondiente desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{r}_i$  y se suma sobre todas las partículas, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^M m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^M \left[ \mathbf{F}_i^{(ap)} + \mathbf{F}_i^{(v)} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i. \quad (77)$$

<sup>†</sup>Es famosa la advertencia "On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage", o "No encontraremos Figuras en esta Obra". J. L. Lagrange, *Mécanique analytique* (1788), pág. vi.

El principio de D'Alembert se expresa formalmente diciendo que

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{F}_i^{(v)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (78)$$

y por lo tanto debe ser

$$\sum_{i=1}^M \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i^{(ap)} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (79)$$

Si las coordenadas generalizadas son  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , los desplazamientos virtuales son

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (80)$$

Reemplazando en la ec. (79), resulta

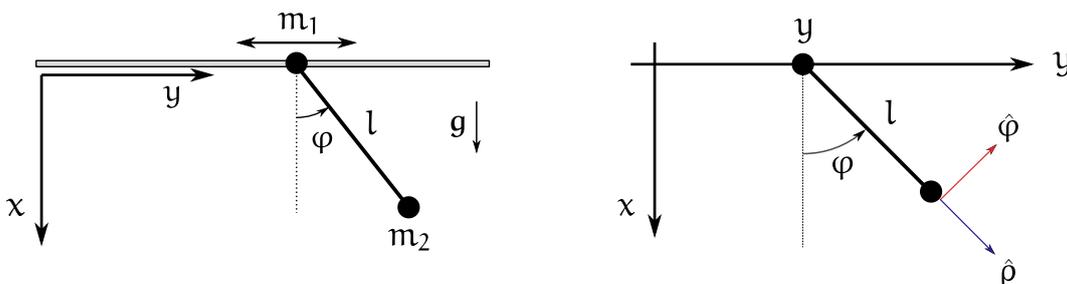
$$\sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^M \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i^{(ap)} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0. \quad (81)$$

Supongamos que las variaciones  $\delta q_j$  puedan realizarse de manera independiente. Esto significa que la ec. (81) es en realidad un conjunto de  $N$  ecuaciones independientes,

$$\sum_{i=1}^M \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i^{(ap)} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (82)$$

Se trata de un sistema de  $N$  ecuaciones para las  $N$  incógnitas  $q_j$ .

A modo de ejemplo, volvamos al problema de las dos partículas que muestra la figura.



Escribiremos el sistema de ecuaciones (82). Habrá dos ecuaciones, puesto que ese es el número de coordenadas. Usando las coordenadas generalizadas  $y$  y  $\varphi$ , tenemos:

$$\mathbf{r}_1(y, \varphi) = y \hat{y}, \quad \mathbf{r}_2(y, \varphi) = y \hat{y} + l \hat{\rho}(\varphi). \quad (83)$$

El sistema (81) se lee como

$$\begin{aligned} & \left[ (m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} \right] \delta y + \\ & \left[ (m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} \right] \delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Debido a que  $\delta y$  y  $\delta\varphi$  son independientes, hay aquí contenidas dos ecuaciones:

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} = 0, \quad (85)$$

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2^{(ap)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} = 0. \quad (86)$$

A partir de las posiciones de las partículas, ecs. (83), resulta

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} = \hat{y}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} = \hat{y}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} = l\hat{\varphi}(\varphi), \quad (87)$$

donde hemos usado que  $\hat{\rho}'(\varphi) = \hat{\varphi}(\varphi)$ . Y, por otro lado,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{y} \hat{y}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{y} \hat{y} + l[\ddot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \hat{\rho}(\varphi)]. \quad (88)$$

A su vez, las fuerzas aplicadas son los pesos de las dos partículas,

$$\mathbf{F}_1^{(ap)} = m_1 g \hat{x}, \quad \mathbf{F}_2^{(ap)} = m_2 g \hat{x}. \quad (89)$$

Finalmente, pasemos en limpio las ecs. (85) y (86). La primera se reduce a

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l[\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] = 0. \quad (90)$$

La ec. (86), por otra parte, queda como

$$\ddot{y} \cos \varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0. \quad (91)$$

Son los mismos resultados de las ecs. (53) y (54). Recordemos que a esas ecuaciones las deducimos a partir de  $m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$ , donde las fuerzas incluían tanto las aplicadas como las de vínculo. Con el principio de D'Alembert sólo necesitamos ocuparnos de las fuerzas aplicadas. Esta vez debemos disculparnos por no haber cubierto la cuota mínima de cien ecuaciones que exige la Secretaría Académica. Nos esmeraremos en la próxima entrega.

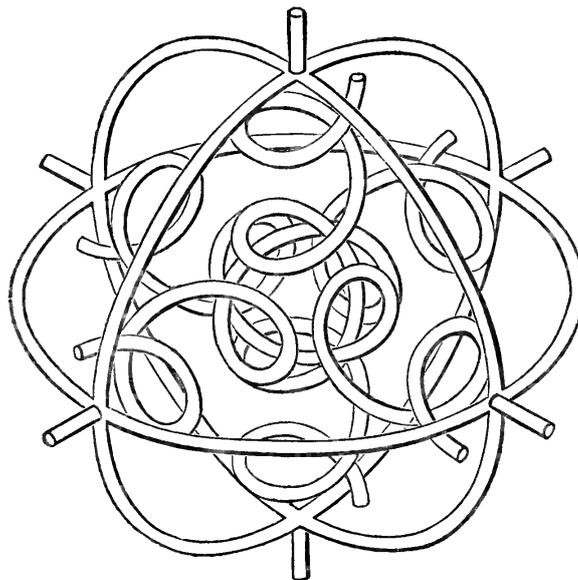


Fig. 25.