

Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019
Clase práctica del lunes 26/8

*Multiplicadores de Lagrange. Fuerzas de vínculo. Problema de la persecución.**

1	De D’Alembert a Euler-Lagrange	1
1.1	Otra vez el péndulo simple	5
2	El método de los multiplicadores de Lagrange	7
2.1	Primera demostración	8
2.2	Segunda demostración	9
2.3	Lo que hay que recordar	12
3	Ejemplos	12
3.1	El péndulo simple una vez más	12
3.2	El péndulo simple en coordenadas polares	15
3.3	El péndulo doble	15
3.4	Ejercicio propuesto	17
4	Significado físico de los multiplicadores	18
4.1	El caso del péndulo simple	18
4.2	El caso general	19
5	Ejemplos	21
5.1	El péndulo simple en coordenadas cartesianas	21
5.2	El péndulo simple en coordenadas polares	21
5.3	El sistema del problema 3 de la Guía 2	22
5.4	El sistema del problema 5 de la Guía 2	25
6	Vínculos no holónomos	29
6.1	El problema de la persecución (problema 13 de la Guía 2)	30

1. De D’Alembert a Euler-Lagrange

Consideremos un sistema formado por N partículas. Revisaremos el camino que lleva desde el principio de D’Alembert,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(v)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1)$$

hasta las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (2)$$

El principio de D’Alembert (1) postula que es nulo el trabajo de las fuerzas de vínculo $\mathbf{F}_i^{(v)}$ en cualquier desplazamiento virtual del sistema. Junto con la segunda ley de Newton,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(v)} + \mathbf{F}_i, \quad (3)$$

*¿Me hablas a mí?: zanellaj@df.uba.ar

conduce de inmediato a la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (4)$$

donde la suma sobre i se extiende a todas las partículas del sistema y, lo que es fundamental, donde las fuerzas \mathbf{F}_i son únicamente las fuerzas aplicadas. Para llegar desde esta ecuación a las ecuaciones de Euler-Lagrange, lo primero que uno hace es escribir las posiciones de las partículas en términos de n coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t). \quad (5)$$

A partir de aquí se calculan dos cosas. Derivando con respecto al tiempo se obtienen las aceleraciones y, por otro lado, diferenciando con respecto a las coordenadas q_j resultan los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_i$. Lo primero es claro; lo segundo consiste en escribir

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (6)$$

Los desplazamientos se llaman virtuales porque la variación δt es nula.

Con las aceleraciones por un lado y los desplazamientos virtuales por el otro, todo escrito en términos de las q_j , las \dot{q}_j , las \ddot{q}_j y de las δq_j , luego de manipulaciones que parecen fruto de una inspiración sobrehumana, se llega a una forma equivalente del principio de D'Alembert:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0, \quad (7)$$

donde T es la energía cinética y donde Q_j es la fuerza generalizada correspondiente a q_j ,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (8)$$

La ec. (7) es de aplicación más general que las ecuaciones de Euler-Lagrange. En primer lugar, no requiere escribir las fuerzas en términos de potenciales. En segundo lugar, la ec. (7) vale tanto si las variaciones δq_j son independientes o no.

Si las fuerzas aplicadas se deducen de un potencial $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, resulta

$$Q_j = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (9)$$

y obtenemos entonces una forma menos general de las ecuaciones de movimiento pero más cercana a las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0, \quad (10)$$

donde $\mathcal{L} = T - V$.

Si las variaciones son independientes, el término asociado a cada variación en la ec. (7) debe ser cero. Así, sin asumir nada acerca de las fuerzas aplicadas, una forma preliminar y más general de las ecuaciones de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (11)$$

Y, finalmente, en el caso de que las fuerzas aplicadas se deduzcan de un potencial que no depende de las velocidades, obtenemos la forma menos general pero de más común aplicación de las ecuaciones de movimiento, que son las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (12)$$

Es importante en la práctica considerar un caso intermedio, cuando no todas las fuerzas se escriben en términos de un potencial. En tal situación se define un lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, en donde V incluye a las fuerzas que se escriben a través de potenciales. Si no todas las fuerzas pertenecen a esta clase, las ecuaciones de movimiento conservarán el término con la fuerza generalizada Q_j asociada a las fuerzas que no han pasado a formar parte del lagrangiano a través de V . Es decir, podemos encontrarnos con ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0, \quad (13)$$

o, si las variaciones son independientes, de la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j. \quad (14)$$

No hay ninguna obligación de incluir en \mathcal{L} a todas las fuerzas que se obtengan de un potencial. Lo más habitual es hacer eso, pero no se comete ningún error si algunas fuerzas deducibles de un potencial son apartadas del lagrangiano y consideradas como parte de las Q_j . En un caso extremo, el lagrangiano podría estar dado únicamente por la energía cinética. Así, en la ec. (7), podemos identificar $T = \mathcal{L}$.

Hay suficientes motivos para no perder de vista las formas más generales de las ecuaciones de movimiento, ecs. (13) y (14). La razón más importante es que no siempre es posible elegir un conjunto de coordenadas generalizadas cuyas variaciones sean independientes, que es lo que permite pasar de la ec. (13) a la ec. (14). La configuración del sistema podrá quedar perfectamente definida a partir de los n valores de las q_j , y n podrá ser el número mínimo de coordenadas que es necesario informar, y aún así es posible que las variaciones de las q_j no sean independientes. Eso ocurre, por ejemplo, cuando se tienen vínculos no holónomos de la forma

$$f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0. \quad (15)$$

Son vínculos que no pueden reducirse a una relación entre las coordenadas, sino que involucran sus derivadas respecto del tiempo. La única clase de vínculos no holónomos de

la forma (15) que estudiaremos en esta materia serán lineales en las velocidades,

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + b_l(q_1, \dots, q_n, t) = 0. \quad (16)$$

El índice $l = 1, \dots, s$ se usa para especificar la l -ésima condición de vínculo. Estas condiciones se traducen en una relación entre las variaciones de δq_j y δt :

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j + b_l(q_1, \dots, q_n, t) \delta t = 0. \quad (17)$$

Para desplazamientos virtuales $\delta t = 0$, de modo que las variaciones virtuales de las coordenadas quedan ligadas por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j = 0. \quad (18)$$

Veremos ejemplos concretos más adelante.

La otra razón por la que no hay que olvidar la forma más general de las ecuaciones de movimiento es que en algunos casos resulta práctico trabajar con un número de coordenadas mayor que el estrictamente necesario. En este caso, no por razón de principio sino por decisión del usuario, las variaciones δq_j no serán independientes. Esto puede deberse a que eliminar las coordenadas redundantes conduzca a expresiones muy complicadas para la energía cinética y, por lo tanto, para las ecuaciones de Euler-Lagrange. Computacionalmente hablando, la integración numérica de las ecuaciones también puede ser más eficiente, aun cuando sea mayor el número de las incógnitas. Como veremos más adelante, otro motivo para trabajar con más coordenadas que las necesarias es que así se obtiene información sobre las fuerzas de vínculo.

Por ejemplo, no hay nada esencialmente mal en la siguiente elección de las coordenadas para una partícula, por más que no se adivine el motivo que lleva a escribir algo así:

$$\mathbf{r}(x, \rho, r, \theta, \varphi) = x \hat{x} + \rho \sin \varphi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}, \quad (19)$$

donde ρ , r , θ y φ tienen el significado usual de las coordenadas cilíndricas y polares.

Cuando se eligen coordenadas para un problema, por lo general uno trata de incluir implícitamente en esa elección todos los vínculos posibles, de modo que no sea necesario expresarlos por separado. Pero si uno decide trabajar con un número de coordenadas mayor que el estrictamente necesario, habrá ecuaciones de vínculo que queden sin usar, por decirlo de alguna manera. En general, esas ecuaciones serán de la forma

$$g_l(q_1, \dots, q_n, t) = c_l. \quad (20)$$

El índice l prevé la existencia de más de una de estas ecuaciones. Aquí vemos que, en principio, sería posible, por cada una de estas ecuaciones, eliminar una de las coordenadas. Pero, por alguna razón, uno se abstiene de hacer eso.

Diferenciando respecto de las q_j , la relación entre las variaciones virtuales es

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_l}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j = 0. \quad (21)$$

Es importante notar que la ec. (21) es la relación que liga a los desplazamientos virtuales δq_j , y no la forma diferencial de la ecuación de vínculo, que en verdad se escribe como

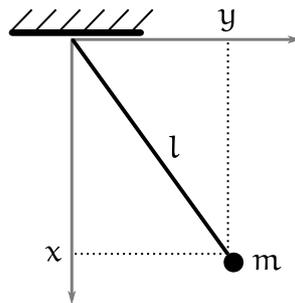
$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_l}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j + \frac{\partial g_l}{\partial t}(q_1, \dots, q_n, t) \delta t = 0, \quad (22)$$

o, equivalentemente, como

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_l}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + \frac{\partial g_l}{\partial t}(q_1, \dots, q_n, t) = 0. \quad (23)$$

1.1. Otra vez el péndulo simple

Para fijar ideas, veamos un problema en donde se trabaja con más coordenadas que las necesarias. Se trata de un péndulo que se mueve en el plano vertical xy .



Sabemos que bastaría con informar el valor del ángulo que la barra forma con el eje x para definir completamente la configuración del sistema. Pero la configuración del sistema también queda definida si informamos al mismo tiempo los valores de x e y . Este sería un conjunto redundante de coordenadas, porque hay formas de definir todo con una sola coordenada. De todas maneras, usando x e y como coordenadas resulta

$$\mathbf{r}(x, y) = x \hat{x} + y \hat{y}, \quad (24)$$

el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx, \quad (25)$$

y, finalmente, la ec. (10) se lee como

$$m(\ddot{x} - g) \delta x + m\ddot{y} \delta y = 0. \quad (26)$$

Esto vale para variaciones cualesquiera de x e y que respeten la condición de vínculo

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (27)$$

No podemos, en esta instancia, decir que son nulos los términos que multiplican a δx y a δy en la ec. (26), cosa que sí podríamos hacer si δx y δy fueran independientes. Evidentemente, uno no puede hacer variaciones δx y δy independientes. Para mantener constante la distancia al origen, debe ocurrir que

$$(x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2 = l^2. \quad (28)$$

Expandiendo hasta primer orden en las variaciones queda

$$x^2 + 2x\delta x + y^2 + 2y\delta y = l^2, \quad (29)$$

pero como $x^2 + y^2 = l^2$, en definitiva tenemos que

$$x\delta x + y\delta y = 0. \quad (30)$$

No es necesario hacer una cuenta tan detallada para llegar a este resultado. La forma práctica de obtener la relación entre las variaciones es diferenciar la ecuación de vínculo,

$$\delta(x^2 + y^2) = 0, \quad (31)$$

de donde se obtiene la ec. (30) de manera inmediata.

¿Qué haría uno muy ingenuamente? Bueno, ya que la ec. (30) permite eliminar una de las variaciones en términos de la otra, por ejemplo,

$$\delta x = -\frac{y}{x}\delta y, \quad (32)$$

sustituyendo en la ec. (26) resulta

$$m \left(\ddot{y} - \frac{y}{x}\ddot{x} - g \right) \delta y = 0. \quad (33)$$

Ahora sí, el término entre paréntesis debe ser igual a cero. Sin embargo, aún nos faltaría escribir x en términos de y (o viceversa). Este fue un ejercicio que hicimos durante la primera clase. Copiamos aquí el escalofriante resultado de entonces:

$$\ddot{y} + \frac{y\dot{y}^2}{l^2 - y^2} + \frac{g}{l^2}y\sqrt{l^2 - y^2} = 0. \quad (34)$$

Todo esto está muy bien, en principio el método de eliminación funciona, pero la cuestión es que si uno decidió trabajar con más coordenadas que las necesarias debió deberse, justamente, a que quería evitar el proceso de eliminación de unas coordenadas en términos de las restantes. No tiene mucho sentido postergar lo que pudimos hacer desde el principio, esto es, usar los vínculos para reducir el número de coordenadas cuyas variaciones son independientes. Es cierto que las ecs. (25) y (26) se escribieron de manera muy sencilla, pero toda esa sencillez se destruyó al eliminar x en términos de y .

Necesitamos encontrar una manera de trabajar con las ecuaciones en su forma más simple y simétrica sin tener que recurrir, más tarde o más temprano, al proceso de eliminación. Es aquí donde interviene el método de los multiplicadores de Lagrange.

2. El método de los multiplicadores de Lagrange

Hemos visto dos clases de problemas en los que sólo es aplicable la forma general del principio de D'Alembert

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (35)$$

En ambos casos el motivo era el mismo: la no independencia de las variaciones δq_j . En el primer caso, esto era una propiedad intrínseca del problema. En el segundo caso, se trataba del uso deliberado de un número de coordenadas mayor que el mínimo necesario. Dentro de la primera categoría consideramos únicamente vínculos no holónomos de la forma

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + b_l(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad (36)$$

que, para las variaciones virtuales, implican

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j = 0. \quad (37)$$

Dentro de la segunda categoría, los vínculos son del tipo

$$g_l(q_1, \dots, q_n, t) = c_l, \quad (38)$$

o, derivando respecto al tiempo,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_l}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + \frac{\partial g_l}{\partial t}(q_1, \dots, q_n, t) = 0. \quad (39)$$

Las variaciones virtuales correspondientes satisfacen las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_l}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j = 0. \quad (40)$$

Vemos que, tanto en el caso de los vínculos no holónomos lineales en las velocidades como en el caso de los vínculos holónomos, la forma diferencial de los vínculos y las relaciones entre las variaciones virtuales pertenecen a la misma clase, resumibles en las ecs. (36) y (37). Lo que quiere decir que si un método es bueno para un caso también será bueno para el otro. Uno de estos métodos es el de los multiplicadores de Lagrange.

Según el principio de D'Alembert, las ecs. (35) deben cumplirse para todas las variaciones virtuales que satisfagan las ecs. (37). Aunque estén escritas apenas unas líneas más arriba, vamos a repetirlas aquí para apreciar mejor la relación que las vincula:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad \forall \quad \{\delta q_j\} \text{ tal que } \sum_{j=1}^n a_{lj} \delta q_j = 0, \quad (41)$$

con $l = 1, \dots, s$, donde s es el número de condiciones de vínculo.

No está de más enunciar cuál es el problema. El objetivo es encontrar las ecuaciones de movimiento. La cuestión es: ya que no son iguales a cero, a qué deben ser iguales las expresiones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}. \quad (42)$$

Veremos que la respuesta es: deben ser iguales a una combinación lineal de los coeficientes que aparecen en las ecuaciones para las variaciones virtuales; explícitamente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj}. \quad (43)$$

Es fácil ver que esta condición es suficiente. Basta multiplicar por δq_j a cada lado de la ecuación, sumar sobre j y asumir que las δq_j satisfacen la ecuación (37). Lo que no es tan evidente es que también es una condición necesaria.

Existen varias maneras de probar este resultado. Matemáticos y físicos suelen coincidir en el uso de la misma e ingeniosa demostración. Se trata de la demostración que figura en la mayoría de los libros de física, no sólo de mecánica clásica. Tiene la ventaja de ser la más sencilla pero (y creo que hablo por muchos) tiene algo de desagradable, al menos a primera vista. En algunos libros aparece una demostración menos sutil pero más fácil de interpretar geométricamente, y cuando uno logra realmente *ver* la solución del problema gana mucho más que con la demostración ingeniosa.

2.1. Primera demostración

La demostración que encontrarán en el Goldstein y en la mayoría de los libros (¡incluso tú, oh Lanczos!) empieza por aceptar, con fingida resignación, que las δq_j no son arbitrarias y que, por lo tanto, en la ec. (35) no puede concluirse que para cada j la expresión

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (44)$$

deba ser igual a cero. Inmediatamente después, y con una ligereza humillante, se hace notar que cada ecuación de vínculo (37) para las variaciones virtuales puede multiplicarse por una función del tiempo, digamos, $-\lambda_l$, sin afectar su contenido:

$$-\lambda_l \sum_{j=1}^n a_{lj} \delta q_j = 0. \quad (45)$$

Las funciones λ_l son los llamados multiplicadores de Lagrange. Si se suman estas ecuaciones (continúa, como si nada, el argumento), el resultado seguirá siendo cero,

$$-\sum_{l=1}^s \lambda_l \sum_{j=1}^n a_{lj} \delta q_j = -\sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} \right) \delta q_j = 0. \quad (46)$$

Si, por otro lado (ya en el colmo de la locura) se suma esta ecuación a la ec. (35) no obtendremos otra cosa que cero:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} \right) \delta q_j = 0. \quad (47)$$

Luego se llama la atención sobre el hecho de que, habiendo s funciones λ_l , ha de ser posible elegir las de tal modo que se anulen los s últimos términos que multiplican a las variaciones:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} = 0, \quad j = n - s + 1, \dots, n. \quad (48)$$

Para esta elección de las funciones λ_l , la ec. (47) se leerá como

$$\sum_{j=1}^{n-s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} \right) \delta q_j = 0, \quad (49)$$

donde ahora (prestar atención aquí) la suma sobre j va de 1 hasta $n-s$, pues hemos anulado el resto de los términos. Ahora bien (concluye el argumento, con los ojos desorbitados), puesto que aquí sólo intervienen $n-s$ de las variaciones δq_j , que es igual al número de variaciones que pueden ser realizadas independientemente, esto implica que cada uno de los términos que multiplica a las δq_j en la ec. (49) tiene que ser cero:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} = 0, \quad j = 1, \dots, n-s. \quad (50)$$

De este modo queda demostrado, haciendo dos escalas, que los n términos de la suma original deben ser cero. Es decir, para dejarlo asentado por enésima vez,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (51)$$

que es el resultado anticipado en la ec. (43). Esta demostración será muy ingeniosa pero es, me parece, un poco irritante. No se me oculta que estoy siendo ligeramente tendencioso.

2.2. Segunda demostración

Hay otra demostración que, sin ser tan inspirada, posee la ventaja de tener una interpretación geométrica en términos de planos y vectores normales. Encontrarán esta demostración en el libro de Spivak (problema 5.1) y, aunque mencionada sólo al pasar, en el libro de José y Saletan. Es una demostración de álgebra lineal.

Notemos primero que el problema puede replantearse en términos de vectores y productos escalares: las variaciones δq_j se piensan como las componentes cartesianas de un vector \mathbf{q} en \mathbb{R}^n . Así, una expresión del tipo

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (52)$$

es análoga al producto escalar del vector \mathbf{q} con un vector \mathbf{e} que tiene componentes

$$e_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad (53)$$

y, asimismo, las condiciones (37),

$$\sum_{j=0}^n \alpha_{lj} \delta q_j = 0, \quad (54)$$

se representan por el producto escalar de \mathbf{q} con s vectores \mathbf{a}_l que tienen componentes

$$(\mathbf{a}_l)_j = \alpha_{lj}. \quad (55)$$

Está implícito en todo esto que los vectores \mathbf{a}_l son linealmente independientes.

Hechas estas identificaciones, el problema (41) es equivalente a encontrar los vectores \mathbf{e} que son perpendiculares a todos los vectores perpendiculares a los \mathbf{a}_l ,

$$\{\mathbf{e} \mid \mathbf{e} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \text{ tal que } \mathbf{a}_l \cdot \mathbf{q} = 0, \text{ con } l = 1, \dots, s\}. \quad (56)$$

Es trivial que si \mathbf{e} es una combinación lineal de los \mathbf{a}_l entonces lo anterior se cumple:

$$\text{si } \mathbf{a}_l \cdot \mathbf{q} = 0, \text{ entonces } \mathbf{e} = \sum_{l=1}^s \lambda_l \mathbf{a}_l \text{ satisface } \mathbf{e} \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (57)$$

para cualquier elección de los multiplicadores λ_l . Lo no trivial es demostrar que la condición es necesaria, es decir, que para que \mathbf{e} sea perpendicular a todos los vectores que son perpendiculares a los vectores \mathbf{a}_l debe ser entonces

$$\mathbf{e} = \sum_{l=1}^s \lambda_l \mathbf{a}_l, \quad (58)$$

para ciertos multiplicadores λ_l .

La ecuación anterior, que es el resultado fundamental, expresada en componentes, se lee una vez más como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_{lj}. \quad (59)$$

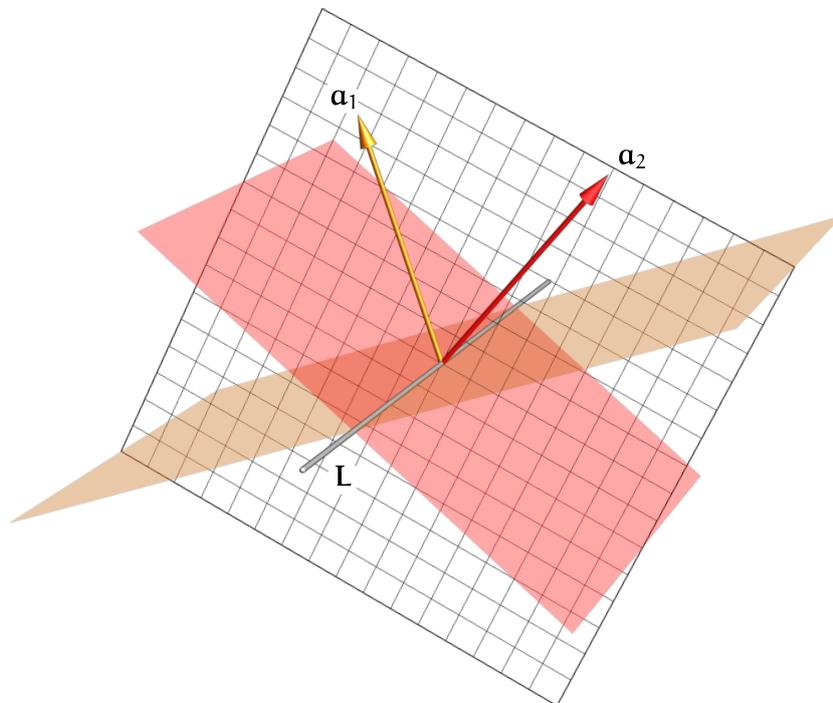
La esencia de la demostración consiste en notar que cada condición del tipo $\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{q} = 0$ define en \mathbb{R}^n un subespacio de dimensión $n - 1$, es decir, un hiperplano. El conjunto de las s condiciones equivale a buscar la intersección de los s hiperplanos. La intersección de dos hiperplanos es un subespacio de dimensión $n - 2$. La intersección de tres hiperplanos es un subespacio de dimensión $n - 3$. Así hasta llegar a que la intersección de s hiperplanos debe ser un subespacio \mathbf{V} de dimensión $n - s$. Los vectores de ese subespacio forman el conjunto de todos los vectores perpendiculares a los \mathbf{a}_l . Ese subespacio \mathbf{V} tendrá una base de $n - s$ vectores, que son, por ortogonalidad, linealmente independientes de los \mathbf{a}_l . De esta manera, es posible definir una base de \mathbb{R}^n que consiste en esos $n - s$ vectores pertenecientes a \mathbf{V} más los s vectores \mathbf{a}_l . Es fácil ver entonces que, si un vector es perpendicular a todos los vectores de \mathbf{V} , no puede ser otra cosa que una combinación lineal de los vectores \mathbf{a}_l .

Por lo tanto, los vectores que son perpendiculares a todos los vectores perpendiculares a los vectores \mathbf{a}_1 son de la forma (58).

Para verlo en un ejemplo, consideremos el espacio de 3 dimensiones ordinario. Muchas de las cosas que digamos aquí serán muy obvias, pero las diremos igual para seguir la idea de la demostración general antes esbozada. Asumiremos que hay dos condiciones de vínculo, que se escribirán como

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (60)$$

Cada una de estas ecuaciones define un plano por el origen, perpendiculares a \mathbf{a}_1 y a \mathbf{a}_2 , respectivamente. Estamos asumiendo que \mathbf{a}_1 no es paralelo a \mathbf{a}_2 , de modo de tener dos condiciones independientes. La intersección de las dos condiciones define una recta L , que es la intersección de los dos planos.



Lo que buscamos es encontrar los vectores que son perpendiculares a todos los vectores que son perpendiculares tanto a \mathbf{a}_1 como a \mathbf{a}_2 . En otras palabras: los vectores perpendiculares a L . Una base de \mathbb{R}^3 consiste en los vectores \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y un vector cualquiera contenido en la recta L , digamos \mathbf{x} . Los vectores que buscamos se tienen que poder escribir como una combinación lineal de \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{x} . Pero, en realidad, como deben ser perpendiculares a la recta L , no pueden tener una componente según \mathbf{x} . Luego, los vectores que buscamos son combinaciones lineales de la forma

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \quad (61)$$

que es lo que queríamos demostrar. La figura hubiera sido suficiente.

2.3. Lo que hay que recordar

Para cerrar esta larga explicación, resumiremos aquí los resultados. Las ecuaciones de movimiento surgen de la conjunción de las ecs. (59) y de las condiciones de vínculo (16),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} \quad (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n a_{lj} \dot{q}_j + b_l = 0 \quad (l = 1, \dots, s). \end{array} \right. \quad (62)$$

Son $n + s$ ecuaciones para $n + s$ incógnitas, las n coordenadas generalizadas $q_j(t)$ y los s multiplicadores $\lambda_l(t)$. Son ecuaciones con un carácter muy particular: son a la vez diferenciales y algebraicas, puesto que involucran a las derivadas de las coordenadas pero no a las derivadas de los multiplicadores.

Es habitual señalar que el problema así planteado no destruye la simetría entre las coordenadas, cosa que sí ocurre si se eliminan unas coordenadas (o, al menos, sus variaciones) en términos de las otras, tal como vimos en el ejemplo del péndulo simple.

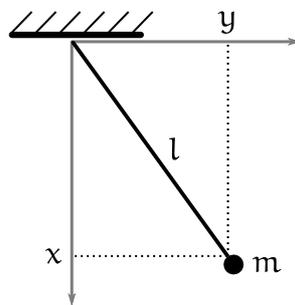
Dicho todo esto, queda confesar que, con relación a los problemas de las guías, el método de los multiplicadores de Lagrange no tendrá una aplicación verdaderamente práctica hasta que no veamos los problemas de cuerpo rígido.

3. Ejemplos

3.1. El péndulo simple una vez más

¿Qué ocurre cuando queremos implementar el método de los multiplicadores de Lagrange para el problema del péndulo simple? Según vimos antes, el método de eliminación rápidamente se tornaba engorroso. ¿Serán los multiplicadores la alternativa vencedora?

Igual que antes trabajaremos con las coordenadas redundantes x e y , dejando al vínculo $x^2 + y^2 = l^2$ como condición aparte. El objetivo es escribir el sistema de ecuaciones (62).



El lagrangiano es el de una partícula en un campo gravitatorio

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx. \quad (63)$$

De aquí obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m(\ddot{x} - g), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = m\ddot{y}. \quad (64)$$

Por otro lado, la forma diferencial del vínculo para las variaciones virtuales es

$$x\delta x + y\delta y = 0. \quad (65)$$

Según el método de los multiplicadores, debemos buscar la solución entre las funciones x e y que satisfagan las ecuaciones

$$m(\ddot{x} - g) = \lambda x, \quad m\ddot{y} = \lambda y, \quad (66)$$

con la condición auxiliar

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (67)$$

Hasta aquí es todo simétrico, ninguna coordenada ha sido eliminada en términos de la otra. ¿Y ahora? Ocurrirá lo que ocurrió antes. Eliminaremos λ de una de las ecuaciones, obtendremos una ecuación diferencial en x y en y , usando el vínculo eliminaremos una de las coordenadas y llegaremos a la misma ecuación que queríamos evitar, ec. (34). Terminaríamos haciendo todo lo que no queríamos hacer. Esto muestra las limitaciones del método, pero más que nada las limitaciones de la elección particular de las coordenadas. Volveremos sobre eso en un minuto. Antes queremos decir algo a favor del método de los multiplicadores incluso en este caso.

Aunque trabajando con x e y parece ser una consecuencia inevitable tener que romper la simetría entre las coordenadas, el sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas (66)-(67) es muy fácil de implementar numéricamente, manteniendo la simetría entre las coordenadas en todo momento. De manera que, aunque en el papel no hayamos encontrado ninguna ventaja, computacionalmente veremos que hemos dado con un método muy práctico de integración numérica. Un algoritmo puede ir propagando simultáneamente los valores de $x(t)$, $y(t)$ y $\lambda(t)$, sin necesidad de ningún proceso de eliminación. Basta con poder encontrar $x(t+\Delta t)$, $y(t+\Delta t)$ y $\lambda(t)$ si se conocen $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$. Construiremos el algoritmo más sencillo de todos. Es posible introducir varios refinamientos.

Supongamos, para simplificar la notación, que $t = 0$. Son datos $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$ y $\dot{y}(0)$. Por hipótesis estos valores satisfacen la condición de vínculo, tanto en su forma exacta como en su forma diferencial, que es una consecuencia de aquella:

$$x(0)^2 + y(0)^2 = l^2, \quad (68)$$

$$x(0)\dot{x}(0) + y(0)\dot{y}(0) = 0. \quad (69)$$

Queremos encontrar $x(\Delta t)$, $y(\Delta t)$, $\dot{x}(\Delta t)$, $\dot{y}(\Delta t)$ y $\lambda(0)$. Si podemos dar este salto en Δt para $t = 0$, lo podremos dar para $t = \Delta t$, y así sucesivamente. En lo que sigue el signo "igual" querrá decir "igual hasta orden Δt ".

Encontrar las nuevas posiciones es fácil:

$$x(\Delta t) = x(0) + \dot{x}(0)\Delta t, \quad (70)$$

$$y(\Delta t) = y(0) + \dot{y}(0)\Delta t. \quad (71)$$

Las nuevas velocidades serán

$$\dot{x}(\Delta t) = \dot{x}(0) + \ddot{x}(0)\Delta t = \dot{x}(0) + \left[\frac{\lambda(0)}{m}x(0) + g \right] \Delta t, \quad (72)$$

$$\dot{y}(\Delta t) = \dot{y}(0) + \ddot{y}(0)\Delta t = \dot{y}(0) + \frac{\lambda(0)}{m}y(0)\Delta t. \quad (73)$$

Estas expresiones dependen de $\lambda(0)$, que aún es una cantidad desconocida. Necesitamos averiguarla por otro camino.

Hasta orden Δt , las nuevas posiciones satisfacen la condición de vínculo (68); en efecto,

$$x(\Delta t)^2 + y(\Delta t)^2 = x(0)^2 + y(0)^2 + 2\left[x(0)\dot{x}(0) + y(0)\dot{y}(0)\right]\Delta t = l^2. \quad (74)$$

Para que se satisfaga la condición (69) a tiempo Δt debe ser, hasta el mismo orden,

$$\begin{aligned} x(\Delta t)\dot{x}(\Delta t) + y(\Delta t)\dot{y}(\Delta t) = \\ \left[x(0) + \dot{x}(0)\Delta t\right]\left[\dot{x}(0) + \left(\frac{\lambda(0)}{m}x(0) + g\right)\Delta t\right] + \left[y(0) + \dot{y}(0)\Delta t\right]\left[\dot{y}(0) + \frac{\lambda(0)}{m}y(0)\Delta t\right] = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Como los vínculos (68) y (69) se satisfacen a $t = 0$, hasta orden Δt esto implica

$$\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 + \frac{\lambda(0)}{m}l^2 + x(0)g = 0. \quad (76)$$

De aquí se obtiene el valor inicial de λ ,

$$\lambda(0) = -m \left[\frac{v(0)^2}{l^2} + \frac{x(0)}{l^2}g \right]. \quad (77)$$

Llegado este punto ya podemos calcular las nuevas velocidades, (72) y (73), que era lo que nos faltaba para poder seguir.

Resumiendo: a partir de las condiciones a tiempo $t = 0$ pudimos calcular las posiciones y velocidades a tiempo Δt y el multiplicador λ en $t = 0$. Repitiendo el procedimiento una y otra vez, iremos avanzando en el tiempo en pasos de duración Δt . Esto demuestra que el método de los multiplicadores de Lagrange aplicado al péndulo, si bien no es útil para encontrar las ecuaciones de movimiento en las coordenadas x e y , sí es fácilmente implementable como algoritmo para hacer una integración numérica. El mérito será todavía mayor si tenemos sistemas con más de una partícula y muchos vínculos, como veremos en el caso del péndulo doble.

3.2. El péndulo simple en coordenadas polares

Veamos ahora cómo resulta el método de los multiplicadores en coordenadas polares. En estas coordenadas el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + mg\rho \cos \varphi. \quad (78)$$

La condición de vínculo es

$$\rho = l, \quad (79)$$

o, en términos de las variaciones virtuales,

$$\delta\rho = 0. \quad (80)$$

La condición de vínculo también implica $\dot{\rho} = 0$.

Tendremos entonces

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m(\rho^2\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + g\rho \sin \varphi). \end{cases} \quad (81)$$

El sistema de ecuaciones (62) se leerá ahora como

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi) = \bar{\lambda}, \\ m(\rho^2\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + g\rho \sin \varphi) = 0, \\ \rho = l. \end{cases} \quad (82)$$

Usamos el símbolo $\bar{\lambda}$ para distinguir a este multiplicador del que apareció al resolver el problema en coordenadas cartesianas. La tercera ecuación implica $\dot{\rho} = 0$ y $\ddot{\rho} = 0$. Reemplazando en las dos primeras ecuaciones se obtiene

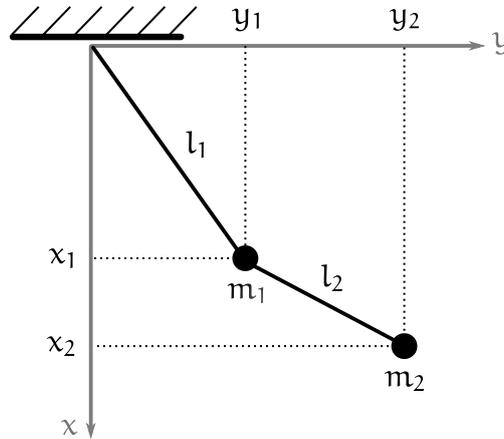
$$\begin{cases} \bar{\lambda} = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi), \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (83)$$

Encontramos así que, en este sistema de coordenadas, las ecuaciones se separan limpiamente en una ecuación para $\bar{\lambda}$ y una ecuación de movimiento propiamente dicha para φ que es independiente de la primera. En este sentido, el cambio de coordenadas cartesianas a polares ha sido un acierto. Pero es algo que apenas debe sorprendernos.

3.3. El péndulo doble

En este ejemplo se va a apreciar mejor la medida en la que se simplifican las ecuaciones de movimiento, al costo de aumentar el número de incógnitas. Usaremos las coordenadas

generalizadas que muestra la figura. Ya sabemos que dos ángulos serían suficientes, pero, como habrán visto en el problema 2 de la Guía 2, las ecuaciones de movimiento no son nada sencillas, en el sentido de que son muchos términos, muchas derivadas y muchas oportunidades de cometer errores.



El lagrangiano es ahora

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, y_1, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + (m_1x_1 + m_2x_2)g. \quad (85)$$

Los vínculos son

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = l_1^2, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_2^2. \end{cases} \quad (86)$$

Las variaciones virtuales estarán ligadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x_1\delta x_1 + y_1\delta y_1 = 0, \\ (x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2) = 0. \end{cases} \quad (87)$$

Multiplicando cada condición por un \$\lambda_1\$ y sumándolas formamos las combinaciones lineales necesarias:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1\delta x_1 + y_1\delta y_1) + \lambda_2[(x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2)] = \\ [\lambda_1x_1 + \lambda_2(x_1 - x_2)]\delta x_1 + [\lambda_1y_1 + \lambda_2(y_1 - y_2)]\delta y_1 - \lambda_2[(x_1 - x_2)\delta x_2 + (y_1 - y_2)\delta y_2]. \end{aligned} \quad (88)$$

Por otro lado necesitamos escribir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (89)$$

para cada coordenada. Por tratarse de coordenadas cartesianas esto es equivalente a escribir las dos componentes cartesianas del par de expresiones \$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\$, donde las fuerzas

son los pesos de las dos partículas. En efecto,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = m_1(\ddot{x}_1 - g), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = m_1\ddot{y}_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = m_2(\ddot{x}_2 - g), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = m_2\ddot{y}_2. \end{cases} \quad (90)$$

Cada una de estas expresiones debe igualarse al coeficiente que acompaña a la respectiva variación en la ec. (88). En definitiva, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1g + \lambda_1x_1 + \lambda_2(x_1 - x_2), \\ m_1\ddot{y}_1 = \lambda_1y_1 + \lambda_2(y_1 - y_2), \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2g - \lambda_2(x_1 - x_2), \\ m_2\ddot{y}_2 = -\lambda_2(y_1 - y_2). \end{cases} \quad (91)$$

Resulta evidente que, en los segundos miembros, los términos en donde aparecen los multiplicadores son equivalentes a fuerzas dirigidas según las barras. Como veremos luego, son las fuerzas de vínculo. El sistema de ecs. (91) debe ser complementado por las ecuaciones de vínculo (86).

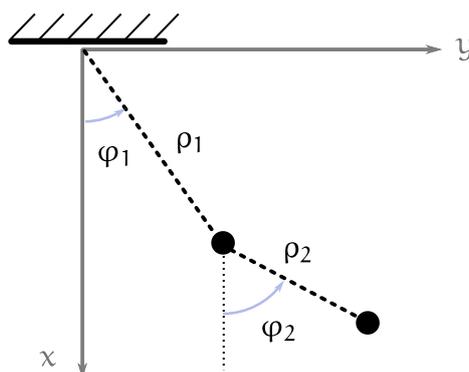
Tal como ocurría con las ecuaciones cartesianas del péndulo simple, las ecuaciones que hemos obtenido para el péndulo doble no nos acercan ni un poco a la solución del problema. La principal y nada despreciable ventaja que poseen es la de ser fácilmente programables en un algoritmo que las integre de forma numérica. El resultado de esta integración no sólo contendrá las trayectorias sino también los multiplicadores λ_1 y λ_2 , cuya interpretación hemos adelantado en el párrafo anterior.

3.4. Ejercicio propuesto

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, plantear el problema del péndulo doble en coordenadas polares, es decir, definiendo las posiciones de las partículas como

$$\mathbf{r}_1 = \rho_1 \hat{\rho}(\varphi_1), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \rho_2 \hat{\rho}(\varphi_2). \quad (92)$$

Por simplicidad tomar $l_1 = l_2 = l$ y $m_1 = m_2 = m$.



4. Significado físico de los multiplicadores

4.1. El caso del péndulo simple

Lo que no podemos ver aún es qué ventaja hay en trabajar con más coordenadas generalizadas que las necesarias, cuando lo más sencillo hubiera sido trabajar directamente, en el caso de los péndulos, por ejemplo, con a lo sumo un par de ángulos. Si tal hubiéramos hecho, el lagrangiano hubiese tenido menos términos, nos hubiéramos ahorrado escribir una ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas radiales y hubiéramos deducido las ecuaciones de movimiento en un par de pasos.

Pero, si se mira con atención, se descubrirá que, al usar más coordenadas, obtuvimos también más ecuaciones. Por ejemplo, en el caso del péndulo simple no hemos reparado todavía en la ec. (83), que copiamos aquí abajo,

$$\bar{\lambda} = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi). \quad (93)$$

Sólo nos importó que esta ecuación no nos estorbara para escribir ni resolver la ecuación de movimiento (84). Pero una vez resuelta esta ecuación y encontrado $\varphi(t)$, podemos evaluar la ec. (93) y encontrar $\bar{\lambda}(t)$. La cuestión pasa por saber si hay alguna información interesante contenida en $\bar{\lambda}(t)$, o si es sólo una función auxiliar sin mayor significado. La respuesta es que $\bar{\lambda}(t)$ contiene información sobre la fuerza de vínculo. Si se fijan bien, verán que el segundo miembro de la ec. (93) es menos la suma de la fuerza centrífuga y de la proyección del peso en la dirección de la barra del péndulo. Es decir, $\bar{\lambda}$ no es otra cosa que la magnitud de la fuerza de vínculo en la dirección de la barra,

$$\mathbf{F}^{(v)} = \bar{\lambda} \hat{\rho}. \quad (94)$$

El signo menos en la ec. (93) significa que la fuerza es ejercida hacia el origen. La tensión es

$$\tau = -\bar{\lambda} = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi. \quad (95)$$

También en coordenadas cartesianas el multiplicador de Lagrange tiene un significado análogo. En esas coordenadas encontramos que las ecuaciones para x e y eran

$$m(\ddot{x} - g) = \lambda x, \quad m\ddot{y} = \lambda y, \quad (96)$$

que se resumen en la ecuación vectorial

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \lambda\mathbf{r}. \quad (97)$$

Vemos así que el significado de λ , salvo por un factor $|\mathbf{r}| = l$, es el de la magnitud de una fuerza que actúa en la dirección radial y que no puede ser otra que la fuerza de vínculo:

$$\mathbf{F}^{(v)} = \lambda l \hat{\rho}. \quad (98)$$

Si integramos las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas, al final de todo podremos calcular la tensión escribiendo

$$\tau = -\lambda l. \quad (99)$$

Con relación a las coordenadas cartesianas y al método numérico que esbozamos para integrar las ecuaciones en ese caso, recordemos que resultaba [ec. (77)]

$$\lambda(t) = -m \left[\frac{v(t)^2}{l^2} + \frac{x(t)}{l^2} g \right] + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (100)$$

En el límite en que $\Delta t \rightarrow 0$, queda

$$\tau = -\lambda l = m \left(\frac{v^2}{l} + \frac{x}{l} g \right). \quad (101)$$

Se reconocerá aquí, igual que en coordenadas polares, el término centrífugo y el término asociado al peso, lo que confirma nuestra aseveración de que $-\lambda l$ es igual a la tensión.

Lo que muestran estos dos ejemplos tiene carácter general. Los multiplicadores de Lagrange están relacionados linealmente con las fuerzas de vínculo.

4.2. El caso general

Los vínculos actúan a través de fuerzas. Supongamos resuelto el problema del movimiento para ciertas condiciones iniciales. Habremos tenido que resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} & (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n a_{lj} \dot{q}_j + b_l = 0 & (l = 1, \dots, s). \end{cases} \quad (102)$$

Concentrémonos en uno de los vínculos, digamos, el vínculo con $l = 1$, y supongamos que eliminamos el agente físico encargado de asegurar la realización del vínculo. Resultará posible reproducir el mismo movimiento bajo las mismas condiciones iniciales si externamente se aplican las mismas fuerzas que aplicaba el agente asociado al primer vínculo. Llamemos $f_i^{(1)}$ a esas fuerzas, donde el índice i se refiere a la partícula sobre la que actúa. Notar que un mismo vínculo puede actuar sobre varias partículas simultáneamente. Bajo la acción de estas fuerzas y de los $s - 1$ vínculos restantes el sistema seguirá la misma trayectoria, pero sus ecuaciones de movimiento estarán dadas por estas otras:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(1)} + \sum_{l=2}^s \bar{\lambda}_l a_{lj} & (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n a_{lj} \dot{q}_j + b_l = 0 & (l = 2, \dots, s), \end{cases} \quad (103)$$

donde las $Q_j^{(1)}$ son las fuerzas generalizadas asociadas a las fuerzas aplicadas $f_i^{(1)}$,

$$Q_j^{(1)} = \sum_{i=1}^N f_i^{(1)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (104)$$

Puesto que hemos modificado el sistema, en la ecuación (103) hemos reemplazado los multiplicadores λ_l de las ecs. (102) por $\bar{\lambda}_l$. En el sistema (103), debido a que el primer vínculo ha sido eliminado, el índice l toma valores entre 2 y s . De todas maneras la ecuación para $l = 1$ sigue siendo válida por como hemos definido las fuerzas $f_i^{(1)}$.

Para que las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(1)} + \sum_{l=2}^s \bar{\lambda}_l a_{lj} \end{cases} \quad (105)$$

sean consistentes, debe ser

$$Q_j^{(1)} + \sum_{l=2}^s \bar{\lambda}_l a_{lj} = \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj}. \quad (106)$$

Una forma de cumplir esta igualdad es con $\bar{\lambda}_l = \lambda_l$, para $l = 2, \dots, s$. Con lo que resulta

$$Q_j^{(1)} = \lambda_1 a_{1j}. \quad (107)$$

Es muy razonable que los multiplicadores no cambien, porque a todos los efectos prácticos el sistema no debería enterarse de que un vínculo ha sido sustituido por un agente externo bajo nuestro control. Si los multiplicadores λ_l poseen una interpretación física, entonces sus valores no pueden depender de cómo se consiga imponer uno de los vínculos.

Lo mismo que hicimos con el primer vínculo podemos hacerlo con cualquier otro. Nuestra conclusión es que los multiplicadores λ_l están relacionados con las fuerzas de vínculo a través de las ecuaciones

$$Q_j^{(l)} = \sum_{i=1}^N f_i^{(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lambda_l a_{lj}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (108)$$

Notar que puede haber hasta $3N$ componentes para las fuerzas asociadas a cada vínculo, y la expresión anterior contiene a lo sumo $3N$ ecuaciones y, en general, contendrá muchas menos. Esto significa que será necesario usualmente aportar hipótesis extra sobre las fuerzas para determinar cuánto vale cada una.

Si la identificación $\lambda_l = \bar{\lambda}_l$ resulta cuestionable, lo que puede hacerse es eliminar todos los vínculos de manera simultánea, reemplazándolos por las fuerzas aplicadas necesarias para mantener las mismas condiciones. Es fácil ver entonces que lo único que podemos afirmar es que

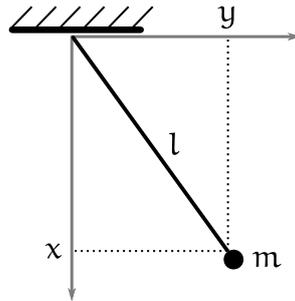
$$Q_j = \sum_{i=1}^N f_i^{(v)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^n \lambda_l a_{lj}. \quad (109)$$

En Q_j confluyen todas las fuerzas de vínculo. Separarlas unas de otras será posible sólo con hipótesis adicionales.

5. Ejemplos

5.1. El péndulo simple en coordenadas cartesianas

Para el sistema de la figura



asumiremos que hay una única fuerza de vínculo actuando sobre la partícula. Queremos averiguar cómo está relacionada esta fuerza con el multiplicador λ asociado a la única ecuación de vínculo,

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0. \quad (110)$$

Leemos de aquí que $a_{1x} = x$ y $a_{1y} = y$. Si la fuerza de vínculo es \mathbf{f} tendremos dos ecuaciones de la forma (108). Notando que $\partial \mathbf{r} / \partial x = \hat{x}$ y análogamente para y , resultan

$$\mathbf{f} \cdot \hat{x} = \lambda x, \quad \mathbf{f} \cdot \hat{y} = \lambda y, \quad (111)$$

de manera que $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{r} = \lambda l \hat{\rho}(\varphi)$. A la misma conclusión llegamos en la ec. (98).

5.2. El péndulo simple en coordenadas polares

En este caso la ecuación de vínculo es

$$\dot{\rho} = 0, \quad (112)$$

lo que implica $a_{1\rho} = 1$ y $a_{1\varphi} = 0$. Las dos ecuaciones que relacionan a la fuerza de vínculo con el multiplicador $\bar{\lambda}$, según la notación que empleamos anteriormente, son

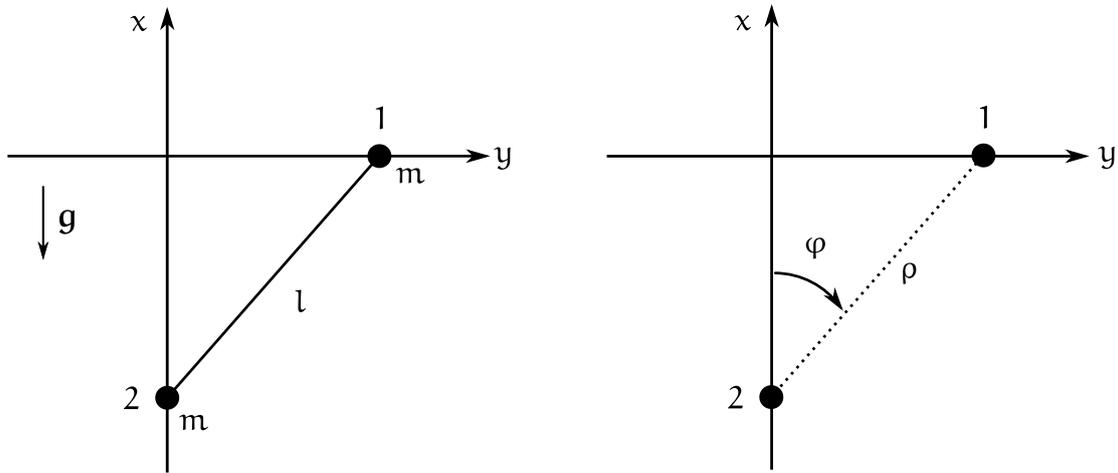
$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{f} \cdot \hat{\rho}(\varphi) = \bar{\lambda}, \quad (113)$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = l \mathbf{f} \cdot \hat{\varphi}(\varphi) = 0. \quad (114)$$

Luego, la componente tangencial de la fuerza es cero y la componente radial es directamente igual a $\bar{\lambda}$. Es la misma conclusión a la que llegamos en la ec. (94).

5.3. El sistema del problema 3 de la Guía 2

Consideremos el sistema de la figura de la izquierda.



Nos concentraremos en el vínculo que mantiene la distancia entre las partículas fija en el valor l , de modo que dejaremos este vínculo como condición aparte y usaremos la distancia entre las partículas como una coordenada más, como en la figura de la derecha. Entonces, usando ρ y φ como coordenadas generalizadas tenemos

$$\mathbf{r}_1(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \hat{y}, \quad (115)$$

$$\mathbf{r}_2(\rho, \varphi) = -\rho \cos \varphi \hat{x}. \quad (116)$$

Lo que conduce al siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + mg\rho \cos \varphi. \quad (117)$$

La ecuación de vínculo es $\dot{\rho} = 0$, de modo que hay un único coeficiente α_{1j} distinto de cero y es $\alpha_{1\rho} = 1$. Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange obtenemos las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi) = \lambda, \\ m(\rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + g\rho \sin \varphi) = 0. \end{cases} \quad (118)$$

Aplicando ahora el vínculo $\rho = l$, resulta, primero, la ecuación de movimiento, tal como la vimos en la clase del jueves 22/8,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (119)$$

y, después, una ecuación para el multiplicador

$$\lambda = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi). \quad (120)$$

Nos gustaría demostrar que λ está relacionado con la tensión o compresión de la barra que une a las partículas. Formemos las fuerzas generalizadas asociadas, como en la ec. (108). A diferencia del péndulo simple, hay dos partículas involucradas:

$$Q_\rho = \mathbf{f}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \rho} + \mathbf{f}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \rho} = f_{1y} \sin \varphi - f_{2x} \cos \varphi = \lambda, \quad (121)$$

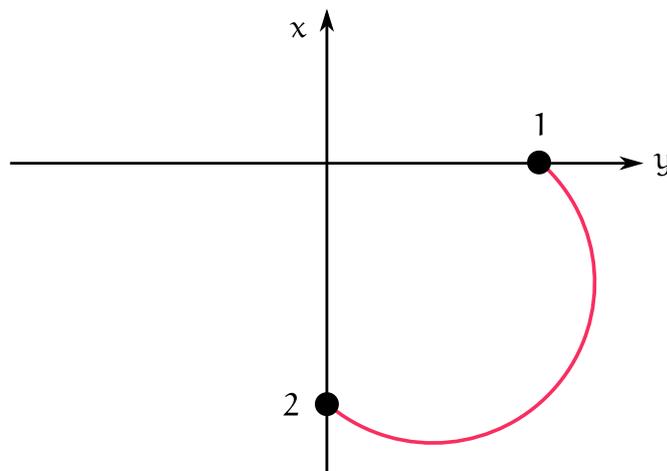
$$Q_\varphi = \mathbf{f}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} + \mathbf{f}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} = f_{1y} \cos \varphi + f_{2x} \sin \varphi = 0. \quad (122)$$

Estas dos ecuaciones implican

$$f_{1y} = \lambda \sin \varphi = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \sin \varphi, \quad (123)$$

$$f_{2x} = -\lambda \cos \varphi = m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \cos \varphi, \quad (124)$$

pero no dicen nada acerca de las otras dos componentes, f_{1x} y f_{2y} . No dicen nada porque formalmente no hemos dicho nada acerca del mecanismo que mantiene unidas a las partículas. De manera instintiva lo que esperábamos es que fueran $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$. Es cierto que dibujamos una barra, pero lo mismo daría montar cada partícula sobre un carrito provisto de un motor y de un sistema de control automatizado. En ese caso no habría razón para suponer que las fuerzas que ejerce cada carrito sean iguales y opuestas. Otro modo de mantener la distancia entre las partículas es uniéndolas mediante un arco rígido:



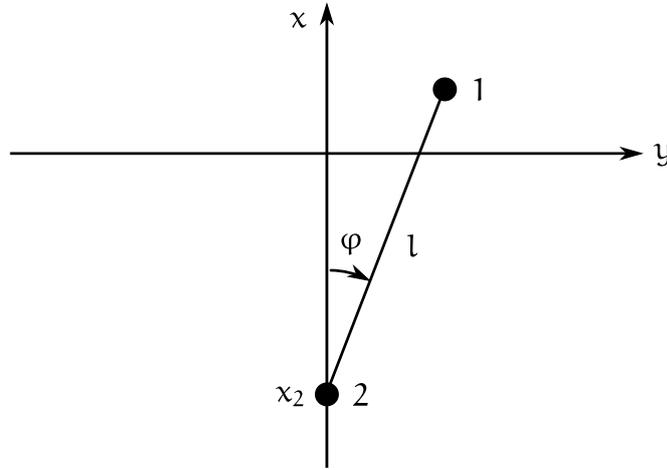
Aquí no hay motivo para decir que las fuerzas de vínculo \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 estén sobre la línea que une a las partículas, que es lo que uno esperaría en el caso de la barra. Sin embargo, todos estos mecanismos realizan el vínculo. Esto indica que lo único que podemos decir hasta ahora de las fuerzas de reacción está en las ecs. (123) y (124).

Notemos que el principio de D'Alembert (si los rieles no hacen trabajo), requiere que

$$\mathbf{f}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0, \quad (125)$$

cosa que, como deberían verificar, se satisface automáticamente para las fuerzas de las ecs. (123) y (124).

Tal vez deberíamos buscar la respuesta en las otras fuerzas de vínculo. Para aislar la fuerza que mantiene a la partícula 1 sobre el eje y , separemos ese vínculo, dejando que la barra gire libremente alrededor de la partícula 2. Usaremos las coordenadas generalizadas x_2 y φ , como en la figura.



Con esta elección resulta:

$$\mathbf{r}_1 = x_2 \hat{x} + l \hat{\rho}(\varphi), \quad (126)$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \hat{x}, \quad (127)$$

y a partir de aquí se calcula el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x_2, \varphi, \dot{x}_2, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (2\dot{x}_2^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l\dot{x}_2 \dot{\varphi} \sin \varphi) - mg(2x_2 + l \cos \varphi). \quad (128)$$

La condición de vínculo es $x_1 = 0$, que se lee como

$$x_2 + l \cos \varphi = 0, \quad (129)$$

o, en su forma diferencial,

$$\dot{x}_2 - l\dot{\varphi} \sin \varphi = 0. \quad (130)$$

Obtenemos de esta manera $\alpha_{11} = 1$ y $\alpha_{12} = -l \sin \varphi$. Así llegamos a las ecuaciones

$$\begin{cases} m(2\ddot{x}_2 - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + 2g) = \bar{\lambda}, \\ m(l\ddot{\varphi} - \ddot{x}_2 \sin \varphi - g \sin \varphi) = -\bar{\lambda} \sin \varphi. \end{cases} \quad (131)$$

Parece del todo razonable pedir que las fuerzas de vínculo que mantienen a la partícula 1 sobre el eje y actúen sólo sobre la partícula 1. Las relaciones entre las fuerzas generalizadas asociadas a este vínculo y el multiplicador $\bar{\lambda}$ son, en tal caso,

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x_2} = f_x = \bar{\lambda}, \quad (132)$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} = l(-f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi) = -\bar{\lambda} l \sin \varphi, \quad (133)$$

de donde resulta $f_y = 0$, tal como esperábamos de la reacción de riel horizontal. Por otro lado $\bar{\lambda}$ es directamente la fuerza en la dirección normal al eje y .

Ahora podemos volver a la fuerza de vínculo f_1 que ejerce la barra sobre la partícula 1. Nos faltaba conocer su componente x , es decir f_{1x} . Debido a que la partícula 1 se mantiene sobre el eje y , las fuerzas en la dirección x deben anularse. Lo que implica

$$f_{1x} + f_x - g = 0. \quad (134)$$

Luego, la componente que buscamos es

$$f_{1x} = g - f_x. \quad (135)$$

Empleando la ecuación de vínculo (130) para escribir \ddot{x}_2 en términos de $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$, escribiendo explícitamente $f_x = \bar{\lambda}$ a partir de la primera de las ecs. (131), y usando la ecuación de movimiento (119), luego de algunos cálculos sencillos se obtiene

$$f_{1x} = -m(g \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2) \cos \varphi. \quad (136)$$

Si comparamos con la ec. (124) vemos que $f_{1x} = -f_{2x}$.

Un desarrollo similar demostraría que f_{1y} , la otra componente que no habíamos podido calcular, debe ser igual a $-f_{2y}$, y por lo tanto, reuniendo ambos resultados, $f_1 = -f_2$.

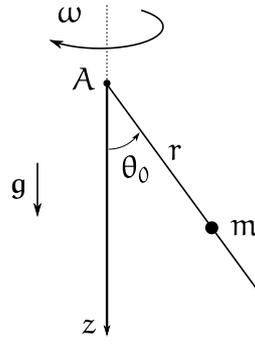
Nos hubiera gustado demostrar esta relación mediante métodos más elementales, pero esos métodos llevan implícitas hipótesis que, con ser muy razonables, no son necesarias.

Por ejemplo, si hubiéramos resuelto este problema de manera directa a través de la segunda ecuación de Newton, seguramente hubiésemos postulado, como algo muy natural, que la fuerza que ejerce la barra está en la dirección de la barra y que sobre cada partícula ésta ejerce fuerzas opuestas. El argumento usual para justificar esta hipótesis es que, al no tener masa ni momento de inercia, la fuerza y el torque netos sobre la barra deben ser cero. Según hemos visto mediante el método de los multiplicadores, las conclusiones que se derivan de aquí resultan ciertas. Corresponde preguntarse cuáles de nuestras hipótesis son las que implican que esto sea así. De algún modo, sin decir abiertamente que las partículas estaban unidas por una barra rígida sin masa, algunas de nuestras hipótesis tienen que significar eso mismo. En algún punto tiene que estar implícito, porque es fácil convencerse de que la relación $f_1 = -f_2$ no es necesaria. Basta pensar en los otros mecanismos capaces de realizar el vínculo.

Repetimos la pregunta: ¿en dónde está dicho que lo que une a las partículas es una barra sin masa ni momento de inercia? El hecho de que haya resultado $f_1 = -f_2$ indica que en algún lado hemos asumido hipótesis equivalentes a las de tener una barra rígida y sin masa entre las dos partículas. Pero ¿en dónde?

5.4. El sistema del problema 5 de la Guía 2

Una partícula de masa m se desliza por un alambre fijo en el punto A y que forma un ángulo θ_0 con el eje vertical. El alambre rota con velocidad angular constante ω .



Primero resolveremos el problema sin coordenadas redundantes. La posición de m es

$$\mathbf{r}(r) = r \hat{\mathbf{r}}(\theta_0, \omega t), \quad (137)$$

donde hemos tomado el eje z apuntando hacia abajo. La única coordenada es r . Los dos vínculos están contenidos implícitamente en la definición de \mathbf{r} . Uno es $\theta = \theta_0$, y el otro es $\varphi = \omega t$, suponiendo que en $t = 0$ la barra pase por el plano xz . El lagrangiano es

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \theta_0) + mgr \cos \theta_0, \quad (138)$$

y la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta_0 - g \cos \theta_0 = 0. \quad (139)$$

Busquemos ahora las fuerzas de reacción. Apartemos un vínculo por vez, empezando por la condición $\theta = \theta_0$, a la que ahora trataremos por separado. El nuevo lagrangiano es

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \theta) + mgr \cos \theta. \quad (140)$$

La condición de vínculo en su forma diferencial se escribe como $\dot{\theta} = 0$, de modo que $\alpha_{1\theta} = 1$. De esta manera resultan las dos ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\omega^2 \sin^2 \theta - g \cos \theta = 0, \\ m(r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + gr \sin \theta) = \lambda. \end{cases} \quad (141)$$

Utilizando aquí la condición de vínculo $\theta = \theta_0$, queda

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta_0 - g \cos \theta_0 = 0, \\ m(-r^2 \omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + gr \sin \theta_0) = \lambda. \end{cases} \quad (142)$$

La primera es la ecuación de movimiento que habíamos obtenido antes. La segunda es una ecuación para λ . Las fuerzas generalizadas asociadas al vínculo $\theta = \theta_0$ son

$$Q_r = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad (143)$$

$$Q_\theta = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{f} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \lambda. \quad (144)$$

Estas ecuaciones implican que la fuerza de vínculo en la dirección radial es nula, cosa que debía ocurrir. La segunda ecuación nos da la componente de la fuerza en la dirección θ . Junto con la segunda ec. (142) implica

$$\mathbf{f} \cdot \hat{\theta} = m(-r\omega^2 \cos \theta_0 + g) \sin \theta_0. \quad (145)$$

No sacamos ninguna información acerca de la componente de la fuerza en la dirección φ .

Miremos, en segundo lugar, lo que pasa si en lugar del sacar el vínculo $\theta = \theta_0$ apartamos el vínculo $\varphi = \omega t$. Ahora el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta_0) + mgr \cos \theta_0. \quad (146)$$

La condición de vínculo se escribe como $\varphi = \omega t$. La forma diferencial de este vínculo es[†]

$$\dot{\varphi} - \omega = 0, \quad (147)$$

de modo que es $\alpha_{1\varphi} = 1$. Nos queda así el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta_0 - g \cos \theta_0 = 0, \\ m(r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta_0) = \bar{\lambda}, \end{cases} \quad (148)$$

que, junto a la condición de vínculo implica

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta_0 - g \cos \theta_0 = 0, \\ 2mr\dot{r}\omega \sin^2 \theta_0 = \bar{\lambda}. \end{cases} \quad (149)$$

La ecuación de movimiento para r sigue siendo la misma. La segunda ecuación da el valor del multiplicador $\bar{\lambda}$. Las fuerzas generalizadas asociadas al vínculo son

$$\bar{Q}_r = \bar{\mathbf{f}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \bar{\mathbf{f}} \cdot \hat{r} = 0, \quad (150)$$

$$\bar{Q}_\varphi = \bar{\mathbf{f}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta_0 \bar{\mathbf{f}} \cdot \hat{\varphi} = \bar{\lambda}. \quad (151)$$

Aparece el resultado que esperábamos, $\bar{Q}_r = 0$. Obtenemos la componente φ de la fuerza

$$\bar{\mathbf{f}} \cdot \hat{\varphi} = 2m\dot{r}\omega \sin \theta_0. \quad (152)$$

Pero no sabemos nada de la componente según la dirección $\hat{\theta}$.

Pareciera haber una indeterminación en las fuerzas que la barra ejerce sobre la partícula. Lo que es contradictorio, porque es claro que, usando las ecuaciones de Newton, podríamos averiguarlas sin problemas. En verdad: asumiendo que la barra actúa sobre la partícula

[†]Un punto para notar: las variaciones virtuales de φ satisfacen la condición $\delta\varphi = 0$ y no $\delta\varphi = \omega\delta t$. Es el primer vínculo que encontramos en el que los desplazamientos virtuales no coinciden con un desplazamiento real del sistema.

con una fuerza

$$\mathbf{F} = F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi} \quad (153)$$

y escribiendo la aceleración de la partícula en coordenadas esféricas, la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se lee como

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{r} + m \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{\theta} \\ + m \left(r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \hat{\varphi} = F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi} + mg \left(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \right). \end{aligned} \quad (154)$$

Imponiendo los vínculos, queda

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta_0 \right) \hat{r} - mr\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \hat{\theta} + 2m\dot{r}\omega \sin \theta_0 \hat{\varphi} \\ = F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi} + mg \left(\cos \theta_0 \hat{r} - \sin \theta_0 \hat{\theta} \right). \end{aligned} \quad (155)$$

Igualemos componente a componente. En la dirección radial volvemos a obtener la ecuación de movimiento para r ,

$$\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \theta_0 - g \cos \theta_0 = 0. \quad (156)$$

En la dirección θ queda una ecuación que da la fuerza según θ ,

$$F_\theta = m(-r\omega^2 \cos \theta_0 + g) \sin \theta_0, \quad (157)$$

y análogamente en la dirección φ ,

$$F_\varphi = 2m\dot{r}\omega \sin \theta_0. \quad (158)$$

Vemos entonces que no hay ninguna ambigüedad respecto a los valores de las fuerzas de reacción. Es más, cada componente coincide con las que habíamos obtenido dejando sin efecto un vínculo a la vez, ecs. (145) y (152), que copiamos a continuación:

$$\mathbf{f} \cdot \hat{\theta} = m(-r\omega^2 \cos \theta_0 + g) \sin \theta_0, \quad (159)$$

$$\bar{\mathbf{f}} \cdot \hat{\varphi} = 2m\dot{r}\omega \sin \theta_0.$$

La primera fuerza es la que debe aplicarse si se suprime el agente que mantiene $\theta = \theta_0$, en tanto que la segunda debe aplicarse si se suprime el agente que proporciona la condición $\varphi = \omega t$. De las otras componentes de estas fuerzas no habíamos podido decir nada a través del método de los multiplicadores, salvo que $\mathbf{f} \cdot \hat{r} = \bar{\mathbf{f}} \cdot \hat{r} = 0$.

La contradicción entre el resultado obtenido por Newton y los obtenidos mediante el método de los multiplicadores es aparente, porque las ecuaciones (159) no responden la cuestión de “¿Qué fuerzas ejerce la barra?”, sino a la pregunta “¿Qué fuerza externa es necesario aplicar para mantener la condición $\theta = \theta_0$ si se suprime el agente físico que produce materialmente el cumplimiento del vínculo?”, y análogamente para la condición $\varphi = \omega t$. El método de los multiplicadores contesta el segundo tipo de pregunta.

Si sustituimos el agente que realiza la condición $\theta = \theta_0$ por una fuerza externa que esté bajo nuestro control, es evidente que esa fuerza puede tener cualquier componente según la dirección φ . Esto es debido a que, al no haber eliminado el agente que mantiene la condición $\varphi = \omega t$, éste es capaz de compensar cualquier fuerza que se aplique en la dirección φ . La fuerza externa que apliquemos para mantener $\theta = \theta_0$ podría, llegado el caso, tener componente nula según φ . Pero de no ser así, el agente que mantiene $\varphi = \omega t$ podría compensar la fuerza aplicada mediante una fuerza de reacción extra según φ .

Físicamente, el origen de la ambigüedad está en que no hay dos agentes distintos para cada uno de los vínculos. Hay uno sólo, que es la barra. No se puede eliminar un vínculo y no eliminar el otro. Si queremos encontrar las fuerzas de vínculo tendremos que apartar los dos vínculos simultáneamente, y ya no podremos clasificar a las fuerzas como “la que mantiene el vínculo $\theta = \theta_0$ ” y “la que mantiene el vínculo $\varphi = \omega t$ ”. Si hacen este ejercicio obtendrán los mismos resultados que dedujimos a partir de las leyes de Newton. Vean, a propósito de esto, el comentario vecino a la ec. (109).

Señalemos, para terminar, que no hay ninguna obligación de usar el método de los multiplicadores para encontrar las fuerzas de vínculo. A menudo es mucho más sencillo escribir las ecuaciones de Newton y despejar de allí las fuerzas. Al seguir este procedimiento, la parte que toca a las ecuaciones de Euler-Lagrange es la de proporcionar los valores de las derivadas segundas de las coordenadas. No hay que perder de vista, tampoco, que si este método resulta sencillo es porque en general uno asume calladamente ciertas hipótesis que no están implícitas en la formulación del problema mediante los multiplicadores. O sea: es hacerse un poco el tonto.

También queremos repetir que quizá la mayor ventaja del método de los multiplicadores no radique en el cálculo de las fuerzas sino en su fácil implementación numérica.

6. Vínculos no holónomos

Hasta ahora usamos el método de los multiplicadores para tratar problemas que perfectamente hubiéramos podido resolver mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange eligiendo un conjunto mínimo de coordenadas generalizadas. Según advertimos, no siempre es posible elegir coordenadas generalizadas de manera que sus variaciones sean independientes. Un caso especial lo conforman los vínculos no holónomos lineales en las velocidades, que imponen condiciones de la forma

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + b_l(q_1, \dots, q_n, t) = 0. \quad (160)$$

Estos vínculos son típicos de problemas con rodadura, en donde la condición implica que la velocidad de dos puntos tiene que ser la misma. Estrictamente hablando son no holónomos siempre que no sea posible integrar estas ecuaciones para llegar a otras de tipo

$$g_l(q_1, \dots, q_n, t) = c_l. \quad (161)$$

Cuando introducimos el método de los multiplicadores, no hizo falta distinguir entre los vínculos del tipo (160) y los de tipo holónimo, como en la ec. (161), que surgen al trabajar con un número redundante de coordenadas. La cuestión central era la no independencia de las variaciones virtuales, variaciones que estaban ligadas en ambos casos por el mismo tipo de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n a_{lj} \delta q_j = 0. \quad (162)$$

El punto de partida eran estas ecuaciones y la forma general del principio de D'Alembert

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (163)$$

Finalmente, lo que había que resolver era el sistema de ecuaciones

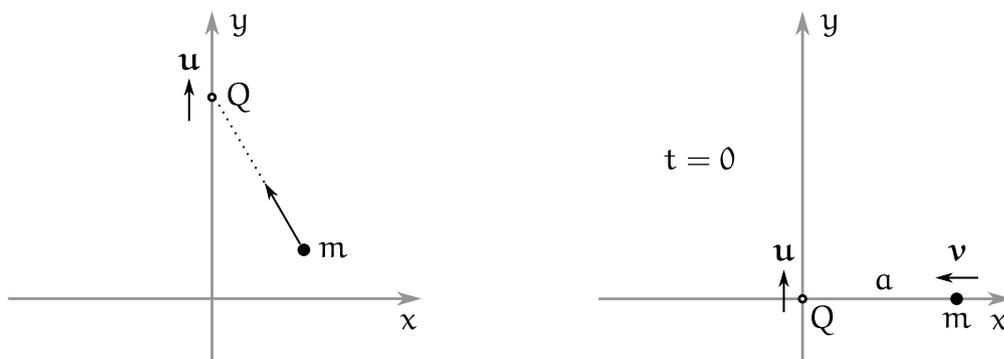
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \lambda_l a_{lj} & (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n a_{lj} \dot{q}_j + b_l = 0 & (l = 1, \dots, s), \end{cases} \quad (164)$$

donde s es el número de condiciones de vínculo y donde las incógnitas son a la vez las funciones $q_j(t)$ y los multiplicadores $\lambda_l(t)$.

Veremos a continuación un ejemplo de vínculo no holónimo para el que no es posible elegir coordenadas cuyas variaciones sea independientes. No es que elijamos voluntariamente un número redundante de coordenadas sino de que no podemos hacer otra cosa.

6.1. El problema de la persecución (problema 13 de la Guía 2)

No lo llegamos a ver en clase; el problema dice así: un punto Q se mueve sobre el eje y según la ecuación $y(t) = ut$. Una partícula puede moverse sobre el plano xy , con la restricción de que en cada instante su velocidad tiene que estar dirigida hacia el punto Q .



Puesto que la partícula puede ocupar cualquier posición en el plano, el número mínimo de coordenadas generalizadas que se necesitan para especificar la posición de la partícula es igual a dos. Ya que el enunciado del problema habla de la persecución de un punto Q

que se mueve según el eje y , todo indica que un par conveniente de coordenadas será, sin ir más lejos, x e y .

La condición de vínculo es que la velocidad de la partícula tiene que estar dirigida hacia el punto Q , cosa que puede enunciarse así:

$$\dot{\mathbf{r}} = \alpha(\mathbf{Q} - \mathbf{r}), \quad (165)$$

donde $\mathbf{Q} = ut \hat{y}$ es la posición del punto Q , y donde α es una función del tiempo, con la condición suplementaria $\alpha \geq 0$, de modo que la partícula persiga al punto Q y no que huya de él. Escrita en coordenadas, la condición de vínculo se lee como

$$\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = \alpha[-x \hat{x} + (ut - y) \hat{y}]. \quad (166)$$

Eliminando α queda una sola ecuación

$$(ut - y)\dot{x} + x\dot{y} = 0. \quad (167)$$

Se trata, entonces, de un vínculo lineal en las velocidades. Es fácil convencerse de que no es integrable. La partícula puede estar detenida en un lugar y empezar a moverse durante un instante cualquiera, cosa que hará en una u otra dirección dependiendo del instante t en el que empiece a moverse. Eso implica que no hay una curva $y(x, t)$ que sea solución de la ecuación anterior para condiciones iniciales dadas. Desde cualquier punto la partícula puede acceder a todo un subconjunto del plano xy de dimensión 2. En otras palabras, la ec. (167) no puede emplearse para eliminar una de las coordenadas en términos de la otra.

Escribamos ahora las ecuaciones de movimiento. Debido a que no hay fuerzas aplicadas, el lagrangiano es simplemente la energía cinética,

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (168)$$

El sistema de ecs. (164) termina siendo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda(ut - y), \\ m\ddot{y} = \lambda x, \\ (ut - y)\dot{x} + x\dot{y} = 0. \end{cases} \quad (169)$$

Tal como ya nos ha pasado antes con el problema del péndulo simple, el uso del multiplicador no proporciona, en este problema en particular, ninguna ventaja a la hora de resolver las ecuaciones de movimiento. El camino natural es eliminar λ de una de las ecuaciones y reemplazarlo en la otra. El sistema (169) puede ser útil para integrar numéricamente las ecuaciones, pero en el papel no lleva a ninguna simplificación respecto del método de eliminación. El sistema se reduce entonces a dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x\ddot{x} - (ut - y)\ddot{y} = 0, \\ (ut - y)\dot{x} + x\dot{y} = 0. \end{cases} \quad (170)$$

A estas mismas ecuaciones hubiéramos llegado sin pasar por el método de los multiplicadores, sino directamente a partir del principio de D'Alembert y de la condición de vínculo. En efecto, la ec. (163) en este problema es

$$\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y = 0. \quad (171)$$

Puesto que las variaciones no son independientes no podemos anular aquí cada uno de los factores que las multiplica, como sucedería si fuera una partícula libre. Pero la ecuación de vínculo (167) implica que las variaciones virtuales satisfacen

$$(ut - y)\delta x + x\delta y = 0. \quad (172)$$

Eliminando, por ejemplo, δy en función de δx y reemplazando en la ec. (171), queda

$$\ddot{x}\delta x - \left(\frac{ut - y}{x}\right)\ddot{y}\delta x = 0. \quad (173)$$

Ahora sí, todo lo que multiplica a δx debe ser cero. Resulta pues

$$x\ddot{x} - (ut - y)\ddot{y} = 0, \quad (174)$$

que coincide con el resultado vía los multiplicadores.

Integrar las ecuaciones de movimiento (170) da un poco de trabajo. Una primera idea es tratar de eliminar la presencia explícita del tiempo, despejando, por ejemplo, $(ut - y)$ de la segunda ecuación y reemplazándolo en la primera, o viceversa. Sea en un caso o en el otro, lo que se obtiene es

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0. \quad (175)$$

Pero esta ecuación es una derivada total,

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0, \quad (176)$$

de modo que lo que encontramos es que el módulo de la velocidad es constante,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2. \quad (177)$$

Hemos obtenido de esta forma una ecuación que, en conjunto con cualquiera de las otras dos, equivale al sistema de ecuaciones original. Ahora podemos escribir nuestro sistema como dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2, \\ (ut - y)\dot{x} + x\dot{y} = 0. \end{cases} \quad (178)$$

Lo que sigue sólo puede descubrirse luego de muchos intentos o consultando desesperadamente la solución. La clave del método es usar x como variable independiente en lugar de t . Esto tiene sentido si lo que se busca es la forma de la trayectoria $y(x)$. Dividiendo la

primera ecuación por \dot{x}^2 se obtiene

$$1 + y'^2 = \frac{v^2}{\dot{x}^2}, \quad (179)$$

donde el primado significa derivada respecto de x . Despejando \dot{x} , resulta

$$\dot{x} = \pm \frac{v}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (180)$$

El signo frente a la raíz debe elegirse según el signo que tenga inicialmente \dot{x} . Si al propagar la solución en el tiempo, $\dot{x}(t)$ pasa por 0 habrá que tener especial cuidado en que la solución no cambie de rama. Dividiendo la segunda ec. (178) por \dot{x} , queda

$$ut - y + xy' = 0. \quad (181)$$

Lo que sigue molestando es t . Lo podemos eliminar si derivamos una vez más. Ya que estamos tratando de pasar todo a la variable independiente x , derivemos la ecuación anterior con respecto a x . Notando que $t' = 1/\dot{x}$, luego de una cancelación inesperada, encontramos que

$$u + x\dot{x}y'' = 0. \quad (182)$$

Usando la ec. (180) para escribir \dot{x} , queda

$$u \pm \frac{xyv y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0. \quad (183)$$

Finalmente, hallamos una ecuación para y' ,

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \mp \frac{u dx}{v x}. \quad (184)$$

Según las condiciones iniciales del problema, $\dot{x}(0) = -v$. Eso indica que debemos tomar el signo inferior. La integral es elemental:

$$y'(x) = \sinh\left(c + \frac{u}{v} \log x\right), \quad (185)$$

donde c es una constante de integración. La condición inicial implica

$$y'(x_0) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = 0. \quad (186)$$

Luego

$$c = -\frac{u}{v} \log a, \quad (187)$$

donde $a = x(0)$. Escribamos entonces

$$y'(x) = \sinh\left[\log\left(\frac{x}{a}\right)^{u/v}\right]. \quad (188)$$

Debido a que en el argumento del seno hiperbólico aparece un logaritmo, termina quedando una expresión relativamente sencilla,

$$y'(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{u}{v}} - \left(\frac{x}{a} \right)^{-\frac{u}{v}} \right]. \quad (189)$$

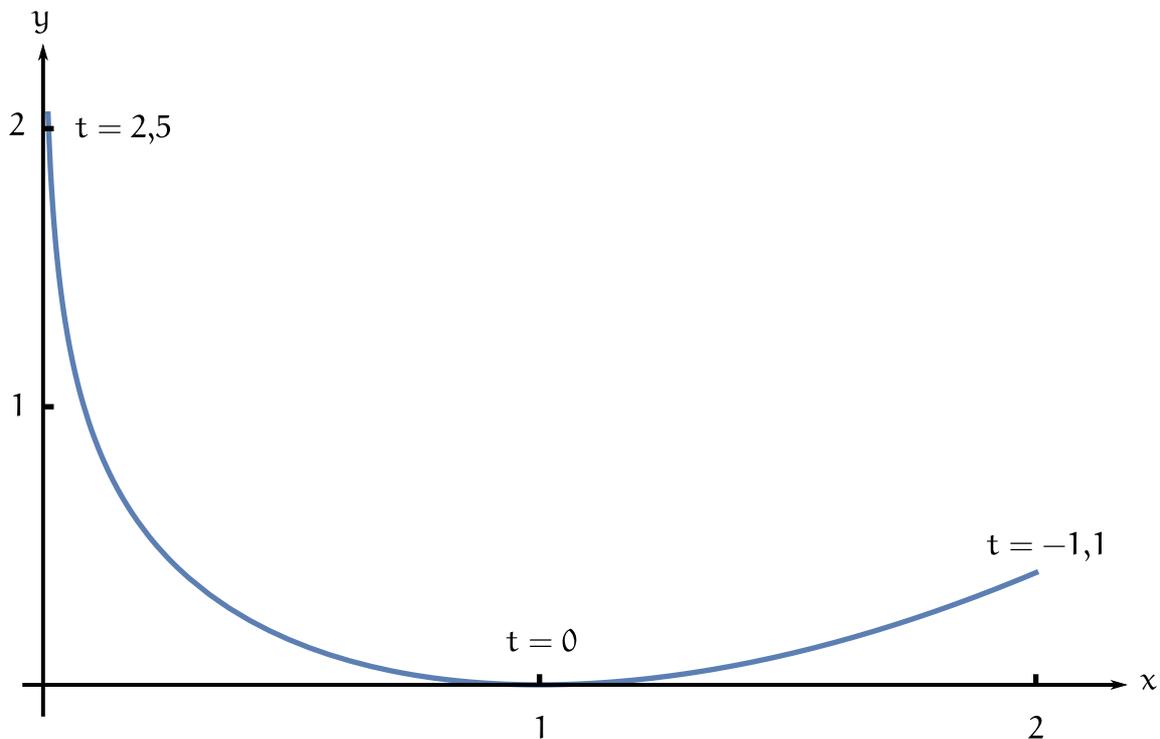
Integrando una vez más y teniendo en cuenta la condición inicial $y(x = a) = 0$, se obtiene

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2} \left[\frac{(x/a)^{1+\frac{u}{v}}}{1+\frac{u}{v}} - \frac{(x/a)^{1-\frac{u}{v}}}{1-\frac{u}{v}} \right] + \frac{uv}{v^2 - u^2}. \quad (190)$$

Si se preguntan por el caso singular $v = u$, un cálculo aún más sencillo da

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{1}{4}. \quad (191)$$

En estas circunstancias la curva de persecución tiene el siguiente aspecto (notar que incluimos parte de la trayectoria previa antes de $t = 0$). Las distancias están medidas en unidades de a .



Queda como ejercicio demostrar que en el caso $v = u$ cuando $t \rightarrow \infty$ la distancia entre perseguidor y perseguido tiende a $a/2$.