

Superficie de revolución de área mínima: problema 1

Se trata de encontrar la curva entre dos puntos que genera la superficie de revolución de área mínima. El problema general sería así: dados un par de puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano xy , encontrar la curva que, extendida entre esos dos puntos, genera por rotación alrededor del eje x la superficie de revolución de área mínima. El problema de la guía sólo pide encontrar esa curva en el caso simétrico, cuando $x_1 = -x_2 = L$ e $y_1 = y_2 = 1$.

Lo primero que hay que hacer es escribir cuál es el área que genera una tal curva. Suponiendo que la curva esté descrita por la función $y(x)$, con $-L \leq x \leq L$, el área de la superficie de revolución que se genera al rotar la curva alrededor del eje x es

$$\mathcal{A}[y] = 2\pi \int_{-L}^L dx y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (1)$$

Hay que encontrar la función $y(x)$ que hace extremal este área. Prescindiendo del factor 2π , formalmente el problema es el mismo que el de minimizar la acción de un lagrangiano

$$\mathcal{L}(y, y', x) = y \sqrt{1 + y'^2}, \quad (2)$$

donde x ocupa el mismo lugar que t en los problemas mecánicos. La función buscada es la solución de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

con las condiciones $y(\pm L) = 1$.

Hay que tratar de aprovechar todas las cosas que conocemos de los problemas mecánicos. Una de esas cosas es la conservación de la función h , que presentamos en la clase de hoy. Sabemos que si el lagrangiano no depende del tiempo entonces existe una integral primera de movimiento

$$h(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j(q, \dot{q}) - \mathcal{L}(q, \dot{q}), \quad (4)$$

donde p_j es el momento generalizado asociado a la coordenada q_j ,

$$p_j(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5)$$

La demostración de que h se conserva es muy sencilla. Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, su derivada total respecto de t es

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right]. \quad (6)$$

*Contrataciones: zanellaj@df.uba.ar (siempre el mínimo precio del mercado)

Si las q_j son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}. \quad (7)$$

Luego

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_j} \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right]. \quad (8)$$

Pasando todo de un mismo lado de la ecuación, queda

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} \right) = 0, \quad (9)$$

que es lo que queríamos demostrar. Un punto importante es que si hay una sola coordenada, esta ecuación es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange, pero tiene la ventaja de ser una ecuación de primer orden en las derivadas respecto del tiempo. Se leería así,

$$h(q, \dot{q}) = c, \quad (10)$$

donde c es una constante que depende de las condiciones iniciales.

En el problema de la superficie de área mínima, el lagrangiano no depende explícitamente de x , que es la variable que hace aquí las veces de t . Entonces en lugar de escribir la ecuación de segundo orden de Euler-Lagrange conviene escribir la ecuación de primer orden que expresa el hecho de que h se conserva. En este caso es

$$h(y, y') = y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} = \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = -\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (11)$$

La conservación de h implica que existe una constante a tal que

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a}. \quad (12)$$

Lo que permite escribir una ecuación diferencial para y en la forma

$$y' = \sqrt{(ay)^2 - 1}, \quad (13)$$

que puede integrarse inmediatamente

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(ay)^2 - 1}} = \int dx. \quad (14)$$

La integral de la izquierda se calcula mediante la sustitución $ay = \cosh u$. Resulta

$$\frac{1}{a} \cosh^{-1}(ay) = x + c, \quad (15)$$

donde c es una constante de integración. Invirtiendo queda

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax + ac). \quad (16)$$

Imponiendo las condiciones $y(\pm L) = 1$, resulta

$$1 = \frac{1}{a} \cosh(\pm aL + ac), \quad (17)$$

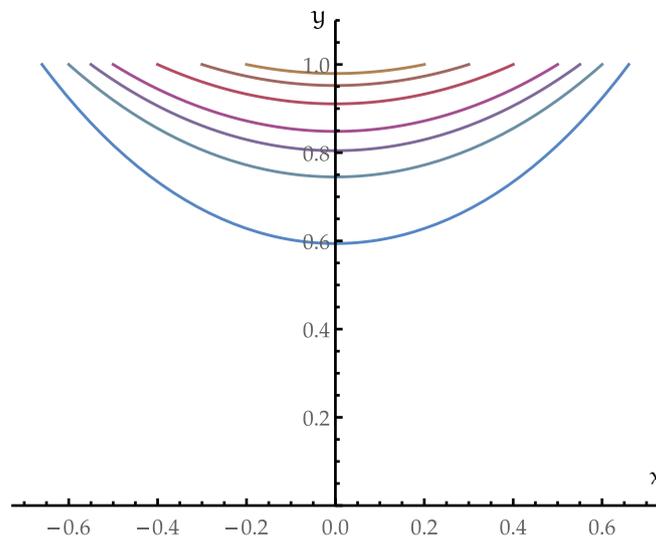
lo que necesariamente implica $c = 0$ y

$$a = \cosh aL. \quad (18)$$

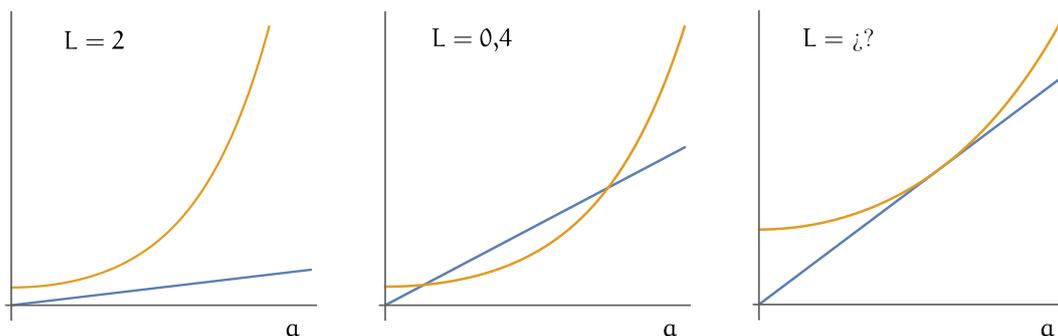
Finalmente, la curva buscada es

$$y(x) = \frac{1}{a(L)} \cosh [a(L)x], \quad (19)$$

donde $a(L)$ es la función que resulta de resolver la ec. (18) para a . La figura muestra una colección de estas curvas para varios valores de L , con a en la primera rama de la solución de la ec. (18), como se explica más abajo.



Respecto al cálculo de a , de modo gráfico se hace patente que la ec. (18) puede tener dos soluciones o ninguna (eventualmente las dos soluciones pueden estar degeneradas). La ec. (18) se representa gráficamente como la intersección de la recta $f(a) = a$ con la función $g(a) = \cosh aL$. Es evidente que si L es muy grande, el coseno hiperbólico logra escaparse de la recta, y que, en cambio, si L es muy chico, de modo que el coseno hiperbólico es prácticamente igual a 1 en un entorno extenso del origen, tendrá dos intersecciones con la curva $f(a) = a$. Estas dos situaciones se ilustran con ejemplos en las primeras dos figuras.



Entre una y otra situación debe existir un punto de transición, cuando las dos soluciones confluyen en una sola, como en la figura de la derecha. Cuando eso ocurre no sólo las dos funciones tienen que tomar el mismo valor sino tener la misma derivada en el punto de intersección. Las dos condiciones son

$$a = \cosh aL, \quad 1 = L \sinh aL. \quad (20)$$

Las incógnitas son dos, a y L . Existen varias formas de reducir las ecuaciones a una sola. Lo más sencillo es, acaso, dividir por L la segunda ecuación, elevar ambas al cuadrado y tomar su diferencia:

$$a^2 - \frac{1}{L^2} = 1, \quad (21)$$

de donde $aL = \sqrt{1 + L^2}$. Volviendo a la segunda ec. (20) queda una ecuación para L ,

$$L \sinh \sqrt{1 + L^2} = 1. \quad (22)$$

Esta es una ecuación de punto fijo, es decir, puede llevarse la forma $x = F(x)$,

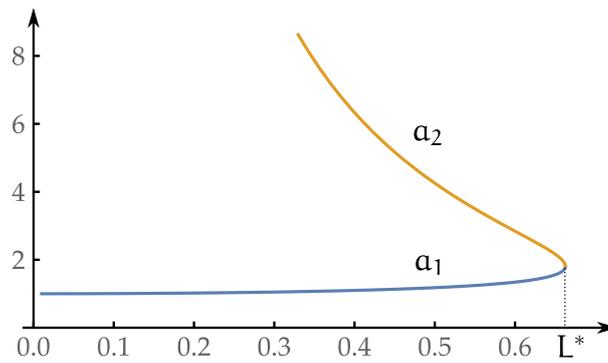
$$L = \frac{1}{\sinh \sqrt{1 + L^2}}. \quad (23)$$

Proponiendo un valor razonable de L e iterando la ecuación se encuentran aproximaciones sucesivas de la solución L^* . Por ejemplo, tomando $L_0 = 1$ e iterando se encuentra:

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_0^2} \right)^{-1} \approx 0,51678, & L_2 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_1^2} \right)^{-1} \approx 0,7252, \\ L_3 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_2^2} \right)^{-1} \approx 0,6352, & L_4 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_3^2} \right)^{-1} \approx 0,6748, \\ L_5 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_4^2} \right)^{-1} \approx 0,6574, & L_6 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_5^2} \right)^{-1} \approx 0,6651, \\ L_7 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_6^2} \right)^{-1} \approx 0,6617, & L_8 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_7^2} \right)^{-1} \approx 0,6632, \\ L_9 &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_8^2} \right)^{-1} \approx 0,6625, & L_{10} &= \left(\sinh \sqrt{1 + L_9^2} \right)^{-1} \approx 0,6628. \end{aligned}$$

La solución con 10 cifras significativas es $L^* \approx 0,6627434193$. Esta constante recibe el nombre de Límite de Laplace. Originalmente aparece en el contexto de la integración temporal del movimiento kepleriano. El valor de a asociado es $a^* \approx 1,810170581$.

Para $L > L^*$ la ecuación de Euler-Lagrange no tiene soluciones, lo que no significa que no exista una superficie de área mínima en ese caso, sino que tal superficie no pertenece a la clase de funciones con derivada segunda continua. Para $L < L^*$ existen dos de tales soluciones, y habrá que averiguar cuál de las dos corresponde al área mínima. La figura siguiente muestra las dos ramas de la solución de la ec. (18).



El área correspondiente a una curva de la forma (19) tiene el siguiente valor

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{-L}^L dx \frac{1}{a} \cosh^2 ax = \frac{2\pi}{a^2} (aL + \sinh aL \cosh aL). \quad (24)$$

Si a es solución de la ec. (18), resulta

$$\mathcal{A}(L) = \frac{2\pi}{a(L)} \left\{ L + \sinh[a(L)L] \right\} = \frac{2\pi}{a(L)} \left[L + \sqrt{a(L)^2 - 1} \right]. \quad (25)$$

Estamos en la situación en la que para un mismo L existen dos valores posibles de a . Sería muy sencillo decidir cuál corresponde al área mínima si la función anterior fuera siempre creciente o siempre decreciente con a . Pero no es una función monótona. Quizá el mejor argumento para conjeturar cuál es la solución de área mínima consista en estudiar el caso en que $L \rightarrow 0$ y ver si es posible después concluir algo para todo $L \leq L^*$.

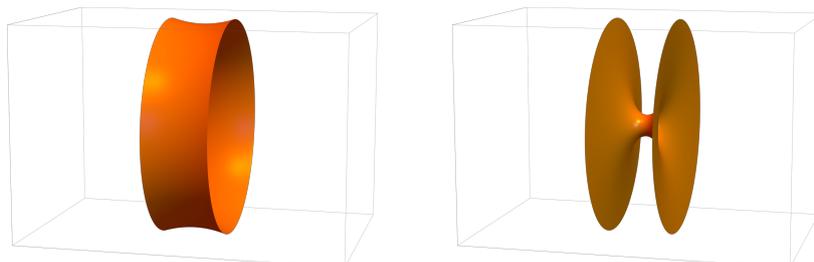
Llamaremos $a_1(L)$ a la solución de la ec. (18) que tiende a 1 cuando $L \rightarrow 0$, y $a_2(L)$ a la solución que en el mismo límite tiende a infinito. Así, para L cercana a cero

$$\mathcal{A}_1(L) \simeq 0, \quad \mathcal{A}_2(L) \simeq 2\pi. \quad (26)$$

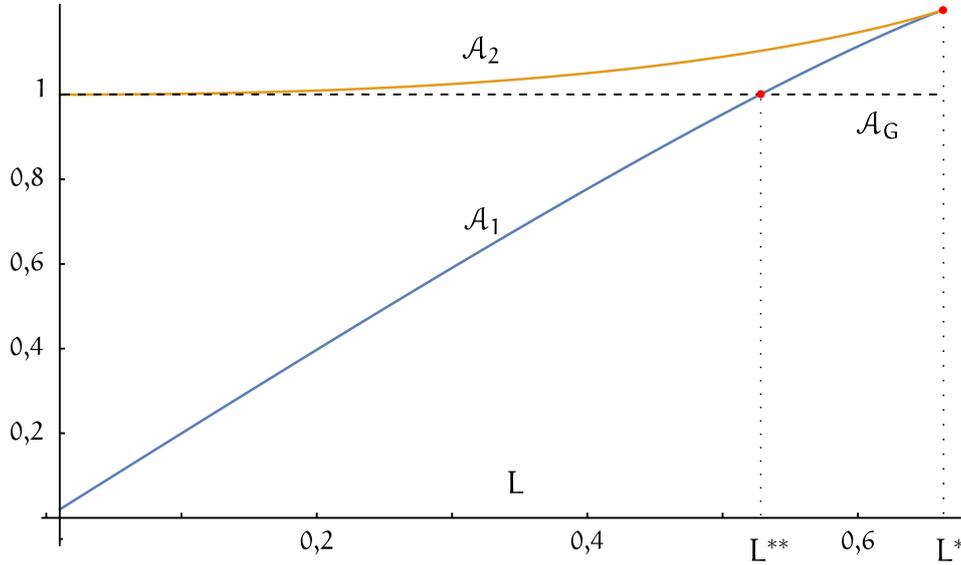
Intuitivamente es fácil ver por qué resulta así. Cuando $L \rightarrow 0$, la primera solución es

$$y_1(x) \simeq 1. \quad (27)$$

Esta curva genera una superficie de revolución que es aproximadamente un cilindro de radio 1 y largo $2L$ (figura de la izquierda). En el límite en que $L \rightarrow 0$, su área tiende a cero. Por otro lado, la segunda solución, al estar dividida por a_2 y al tender a_2 a infinito, es una función que tiende a cero para $-L < x < L$ pero que vale 1 en $x = \pm L$. Es decir, tiene forma de \sqcup . La superficie que genera tiene el aspecto de dos platos de radio 1 unidos por un filamento (figura de la derecha). La suma de las áreas de cada plato tiende a 2π .



Entonces, para L muy chico la solución α_1 es la que da la menor de las áreas. Yendo al otro extremo, para $L = L^*$ las dos soluciones coinciden, $\alpha_1 = \alpha_2$ y las áreas son iguales. El problema es demostrar que sus valores no se cruzan en ningún punto intermedio, de modo que siempre sea α_1 quien dé la solución de menor área. El cálculo numérico muestra que esto en verdad es así. La figura muestra los gráficos de las dos funciones \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 junto con la solución de Goldschmidt \mathcal{A}_G , discutida más abajo.



A algunos les bastará con eso. Para verlo de manera analítica, consideremos como varía la diferencia entre las áreas de cada solución,

$$\Delta\mathcal{A}(L) = \mathcal{A}(\alpha_2(L)) - \mathcal{A}(\alpha_1(L)). \quad (28)$$

Esta diferencia empieza siendo igual a 2π y termina siendo igual a 0. Queremos ver que se mantiene mayor que cero durante todo el intervalo entre $L = 0$ y $L = L^*$.

Calculemos la derivada de \mathcal{A} respecto de L . De la ec. (25) resulta

$$\frac{\mathcal{A}'}{2\pi} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha'(1 - L\sqrt{\alpha^2 - 1})}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \quad (29)$$

Por otro lado, a partir de la ec. (18), se obtiene

$$\alpha' = (L\alpha' + \alpha) \sinh \alpha L = (L\alpha' + \alpha) \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad (30)$$

que implica

$$\alpha' = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}}{1 - L\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \quad (31)$$

Así, volviendo a la ec. (29) queda

$$\frac{\mathcal{A}'}{2\pi} = \frac{2}{\alpha}. \quad (32)$$

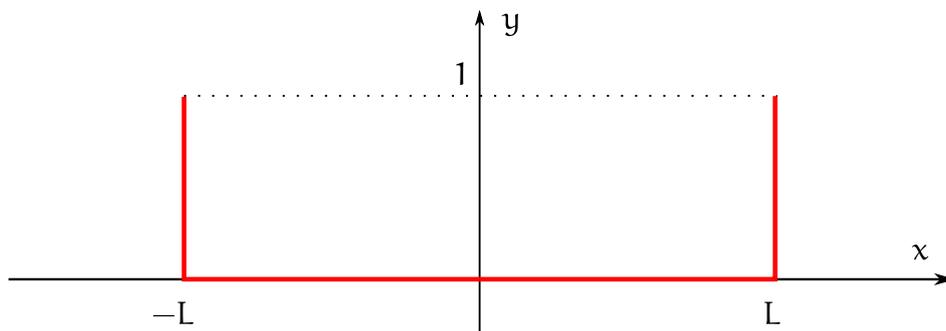
Esto significa que la diferencia $\Delta\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$ tiene derivada

$$\frac{\Delta\mathcal{A}'}{2\pi} = 2 \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} \right), \quad (33)$$

que es siempre menor que cero, puesto que, por construcción, es $a_2 > a_1$. Como $\Delta\mathcal{A}'$ no cambia de signo, si hubiera algún L intermedio entre $L = 0$ y $L = L^*$ en el que las funciones \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 se cruzaran, entonces ya nunca podrían cruzarse otra vez, porque su diferencia seguiría progresando en el mismo sentido. Sin embargo, sabemos que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ en $L = L^*$. Esto implica que no pueden cruzarse en el medio del intervalo: si inicialmente \mathcal{A}_2 es mayor que \mathcal{A}_1 , esa relación debe mantenerse hasta $L = L^*$.

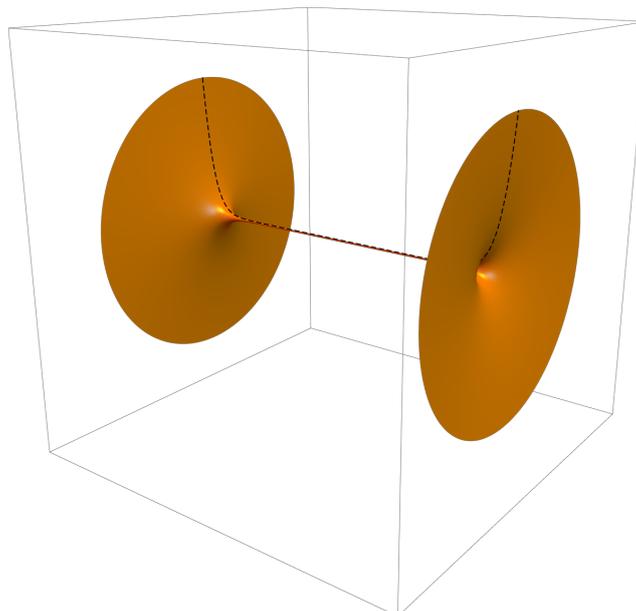
Queda demostrado que, de las dos soluciones posibles, la de menor área es siempre la que corresponde a la rama a_1 de la ec. (18). Esto es, la de menor área entre las funciones dos veces derivables con continuidad. El enunciado del problema sugiere que puede haber otro tipo de curvas que sean las que verdaderamente minimicen el área de la superficie de revolución.

La curva \sqcup que muestra la figura podría ser una candidata.



El hecho de que esta clase de *funciones* no pertenezca al dominio de las funciones exploradas mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange hace que este tipo de solución deba buscarse por otros métodos. Se la llama solución de Goldschmidt

Es razonable que esta *función* genere la superficie de revolución de área mínima cuando L sea suficientemente grande. La superficie consiste en dos discos de radio 1 en los extremos de un filamento sobre el eje x entre $-L$ y L . La figura muestra una versión aproximada de esta superficie, donde en lugar de elegir la curva quebrada se tomó $y(x) = x^{16}$.



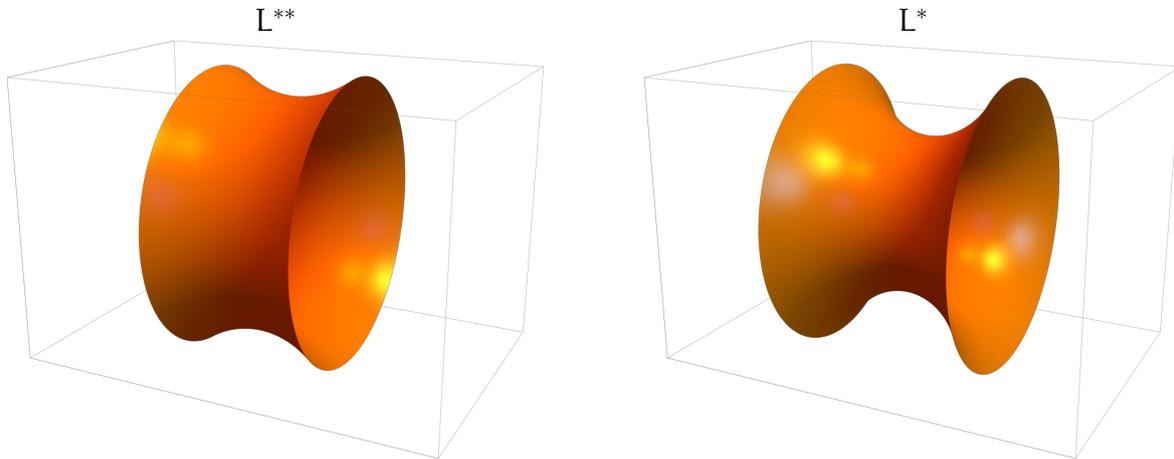
El área de la superficie es igual a la suma de las áreas de los dos discos, $\mathcal{A}_G = 2\pi$. Cuando $L \rightarrow 0$ sabemos que el área \mathcal{A}_1 tiende también a cero. Es decir, para L suficientemente chico la solución suave le gana a la solución quebrada. Ahora comparemos la solución de Goldschmidt con el área de la solución suave en el otro extremo, cuando $L = L^*$. En ese caso (verifíquelo)

$$\mathcal{A}(L^*) = 2\pi\sqrt{1 + (L^*)^2} \approx 2\pi \times 1,19968 > \mathcal{A}_G. \quad (34)$$

Esto implica que para algún $L = L^{**} < L^*$ la solución quebrada tiene que ser igual de ventajosa que la solución suave \mathcal{A}_1 (ver figura de la página 6). Numéricamente se halla que $\mathcal{A}_1(L) = \mathcal{A}_G = 2\pi$ cuando

$$L^{**} \approx 0,527697. \quad (35)$$

A modo de comparación, la figura muestra las superficies de revolución para L^{**} y L^* correspondientes a la solución $\alpha_1(L)$.



Aunque la figura anterior muestra que no, podría pensarse que para L^{**} el radio mínimo de la solución suave tiende a cero y que por eso se produce la transición entre una y otra solución. En realidad resulta

$$r_{\min} = \frac{1}{\alpha^{**}} \approx 0,552434. \quad (36)$$

Resumiendo: si empezamos desde $L = 0$, la superficie de área mínima tiene la forma de una catenoide, tendida entre dos anillos de radio 1 en las posiciones $x = \pm L$:

$$y(x, L) = \frac{1}{\alpha_1(L)} \cosh[\alpha_1(L)x], \quad (37)$$

donde α_1 es la menor de las dos raíces de la ecuación

$$\alpha = \cosh \alpha L. \quad (38)$$

Al llegar a $L = L^{**} \approx 0,528$ la superficie de área mínima cambia radicalmente: en lugar de haber una superficie suave entre los dos anillos extremos, cada anillo soporta un disco de radio 1. Al margen de eso, las soluciones catenoides no existen cuando $L > L^* \approx 0,663$.

El fenómeno por excelencia donde estos resultados tienen relevancia es el de las películas de agua jabonosa (problema de Plateau). Dado un contorno, la película tiende a minimizar el área. Teóricamente, en el problema que acabamos de analizar, si se aumenta L poco a poco desde cero, al alcanzar la separación L^{**} la película tendería a colapsar desde la catenoide hacia los dos discos. En la práctica, si el experimento se realiza muy lentamente, la solución catenoide será metaestable: pequeñas perturbaciones serán insuficientes para que el sistema salte al otro tipo de solución. Eso puede prolongarse hasta alcanzar la separación L^* , más allá de la cual la solución catenoide deja de existir.