CLASE 22/08.

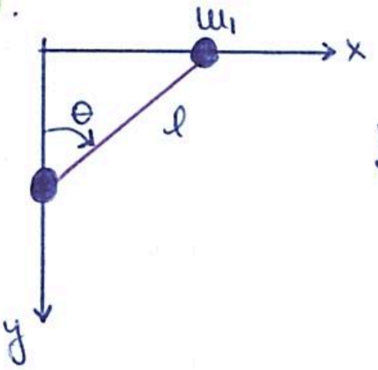
* Principio de trabajos virtuales.

"el trabajo de todas las fuerzas de vínculo ante desplazamientos virtuales compatibles con el vínculo se anula".

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i^{\,v} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i^{\,v} .$$

fuerzas aplicadas.

PROBLEMA ③.



$\downarrow \bar{g}$.

$q = \{\theta\}$.

a) Ecuación de movimiento para θ. (usando D'Alembert).

$\bar{r}_1 = l \sin\theta \,\hat{x} \longrightarrow \delta \bar{r}_1 = l \cos\theta \,\delta\theta \,\hat{x}$.

$\bar{r}_2 = l \cos\theta \,\hat{y} \longrightarrow \delta \bar{r}_2 = -l \sin\theta \,\delta\theta \,\hat{y}$.

$\dot{\bar{r}}_1 = l\cos\theta \,\hat{x}\, \dot{\theta}$

$\dot{\bar{r}}_2 = -l \sin\theta \,\dot{\theta}\, \hat{y}$

$\ddot{\bar{r}}_1 = l(-\sin\theta\, \dot{\theta}^2 + \cos\theta\, \ddot{\theta})\hat{x}$.

$\ddot{\bar{r}}_2 = -l(\cos\theta\, \dot{\theta}^2 + \sin\theta\, \ddot{\theta})\hat{y}$.

¿Fuerzas aplicadas? sólo el peso!. La tensión de la barra es una fuerza de vínculo.

$\vec{F}_1 = m_1 g\, \hat{y}$; $\vec{F}_2 = m_2 g\, \hat{y}$.

$\Rightarrow \vec{F}_1 \cdot \delta \bar{r}_1 = 0$

$\vec{F}_2 \cdot \delta \bar{r}_2 = -m_2 g l \sin\theta \, \delta\theta.$

$\ddot{\bar{r}}_1 \cdot \delta \bar{r}_1 = l^2 \cos\theta (-\sin\theta \, \dot{\theta}^2 + \cos\theta \, \ddot{\theta}) \delta\theta$

$\ddot{\bar{r}}_2 \cdot \delta \bar{r}_2 = l^2 \sin\theta (\cos\theta \, \dot{\theta}^2 + \sin\theta \, \ddot{\theta}) \delta\theta.$

$\Rightarrow$ La ecuación de movimiento resulta:

$$-m_2 g l \sin\theta \, \delta\theta = m_1 l^2 \cos\theta(-\sin\theta \, \dot{\theta}^2 + \cos\theta \, \ddot{\theta}) \delta\theta + $$
$$+ m_2 l^2 \sin\theta (\cos\theta \, \dot{\theta}^2 + \sin\theta \, \ddot{\theta}) \delta\theta.$$

$$\Rightarrow \left\{ l^2 \ddot{\theta} (m_1 \cos^2\theta + m_2 \sin^2\theta) + l^2 \sin\theta\cos\theta (m_2 - m_1) + m_2 g l \sin\theta = 0 \right\}$$

* Si las masas son iguales,

$m l^2 \ddot{\theta} + m_2 g l \sin\theta = 0.$ EC. PÉNDULO SIMPLE.

b) Ecuación de Euler-Lagrange para θ.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 . \quad ; \quad \mathcal{L} = T - V.$$

Escribimos la energía cinética y la energía potencial.

$T = T_1 + T_2.$

$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (l \dot{\theta} \cos\theta)^2.$

$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (-l \dot{\theta} \sin\theta)^2.$

$V = -m_2 g \cos\theta \, l$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 (m_1 \cos^2\theta + m_2 \sin^2\theta) + m_2 g l \cos\theta.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = l^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta (m_2 - m_1) - m_2 g l \sin\theta.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = l^2 \dot{\theta} (m_1 \cos^2\theta + m_2 \sin^2\theta).$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = l^2\ddot\theta\,(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta) + l^2\dot\theta^2\, 2\sin\theta\cos\theta\,(m_2-m_1).$$

$\Rightarrow$ la ecuación de Euler-Lagrange resulta:

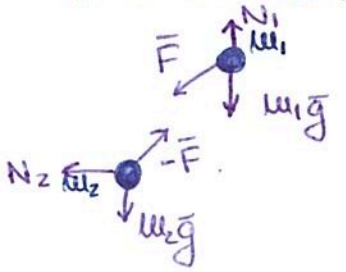
$$\left\{ l^2\ddot\theta\,(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta) + l^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta\,(m_2-m_1) + m_2 g l\sin\theta = 0 \right\}$$

$\Rightarrow$ misma ecuación que obtuvimos con D'Alembert.

c) Tensión F en la barra como función de θ y $\dot\theta$.

La tensión de la barra sólo aparece en las ecuaciones de Newton.

$$\vec F = -F\sin\theta\,\hat x + F\cos\theta\,\hat y.$$



$$m_1\ddot{\bar r}_1 = m_1\bar g + \bar F \rightarrow m_1(l\ddot\theta\cos\theta - l\dot\theta^2\sin\theta) = -F\sin\theta. \quad (1)$$
$$m_2\ddot{\bar r}_2 = m_2\bar g - \bar F \rightarrow m_2(-l\ddot\theta\sin\theta - l\dot\theta^2\cos\theta) = -F\cos\theta + m_2 g \quad (2).$$

Tenemos como incógnitas $F, \ddot\theta, \dot\theta, \theta$!

Pero sabemos que la ecuación de movimiento vale!

$$\Rightarrow \ddot\theta = \left[-m_2 g l\sin\theta - l^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta\,(m_2-m_1)\right]\frac{1}{l^2(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta)}$$

Reemplazando en (1) o en (2), obtenemos $F(\theta,\dot\theta)$.

* Para el caso $m_1 = m_2 \equiv m$:

$$\ddot\theta = \frac{-\cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta}{l^{\cancel{2}}\ \cancel{m}} \Rightarrow \ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\Rightarrow \cancel{-}F\cancel{\sin\theta} = ml\left(\cancel{-}\frac{g}{l}\sin\theta\cos\theta \cancel{-} \dot\theta^2 \cancel{\sin\theta}\right)$

$\Rightarrow$ $F = mg\cos\theta + ml\dot\theta^2$

d) Periodo de movimiento para $\theta \ll 1$.

* Masas iguales $\longrightarrow$ $\omega_1^2 = g/l$. (péndulo simple).

* Masas distintas:

$$l^2\ddot\theta\,(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta) + l^2\dot\theta^2\cos\theta\sin\theta\,(m_2 - m_1) + m_2 g l \sin\theta = 0.$$

$\cos\theta \simeq 1 + \frac{\theta^2}{2} + \cdots$

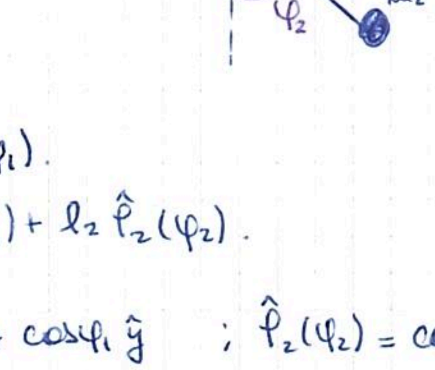
$\sin\theta \simeq \theta + \frac{\theta^3}{3} + \cdots$

$$\Rightarrow 0 \simeq l^2\,\ddot\theta\,(m_1 + \underbrace{\cancel{m_2\theta}}_{O(3)}) + \underbrace{\cancel{l^2\dot\theta^2\theta(m_2-m_1)}}_{O(3)} + m_2 g l\theta$$

$$\Rightarrow l^2\ddot\theta\, m_1 + m_2 g l \theta = 0$$

$$\ddot\theta + \underbrace{\left(\frac{g}{l}\frac{m_2}{m_1}\right)}_{\omega_2^2}\theta = 0$$

PROBLEMA ②.



$q_\mu = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

a) $\vec{r}_1 = l_1\,\hat{\rho}_1(\varphi_1)$.

$\vec{r}_2 = l_1\,\hat{\rho}_1(\varphi_1) + l_2\,\hat{\rho}_2(\varphi_2)$.

$\hat{\rho}_1(\varphi_1) = \sin\varphi_1\,\hat{x} + \cos\varphi_1\,\hat{y}$; $\hat{\rho}_2(\varphi_2) = \cos\varphi_2\,\hat{x} + \sin\varphi_2\,\hat{y}$.

b) Lagrangiano y ecs de E-L

$\dot{\vec{r}}_1 = l_1 \dot{\hat{\rho}}_1(\varphi_1) = l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1$

$\dot{\vec{r}}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2$

$\dot{r}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2$.

$\dot{r}_2^2 = (l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2)^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\varphi}_2$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 &= \cos\varphi_1 \hat{x} - \sin\varphi_1 \hat{y}. \\ \hat{\varphi}_2 &= \cos\varphi_2 \hat{x} - \sin\varphi_2 \hat{y} \end{aligned}\right\} \hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\varphi}_2 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$\Rightarrow \dot{r}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

$V = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + \\ &+ m_1 g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2). \end{aligned} \right\}$$

Ecuaciones de E-L:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = 0. \quad (1) \\ &\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (2). \end{aligned} \right.$$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.
- $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = l_1^2 \ddot{\varphi}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \left(\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \right)$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_1 g l_1 \sin\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin\varphi_1$.

$$\Rightarrow l_1^2\ddot{\varphi}_1(m_1+m_2)+m_2 l_1 l_2\left[\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\dot{\varphi}_2(\cancel{\dot{\varphi}_1}-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]+$$

$$+\cancel{m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}+g l_1\sin\varphi_1(m_1+m_2)=0.$$

La ec. para φ_2 es análoga.

$$\Rightarrow\begin{cases} l_1^2\ddot{\varphi}_1(m_1+m_2)+m_2 l_1 l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)-m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)+ \\ +g l_1\sin\varphi_1(m_1+m_2)=0. \quad (1) \\ \\ l_2^2\ddot{\varphi}_2 m_2+m_2 l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1-m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)+ \\ +m_2 g l_2\sin\varphi_2=0 \quad (2)\end{cases}$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Pequeñas oscilaciones: $\varphi_1\ll 1$; $\varphi_2\ll 1$.

$\sin\varphi_1\simeq\varphi_1+\frac{\varphi_1^3}{3}+\cdots$

$\cos\varphi_1\simeq 1+\frac{\varphi_1^2}{2}+\cdots$

$O(\varphi^3)$.

(1): $l_1^2\ddot{\varphi}_1(m_1+m_2)+m_2 l_1 l_2\ddot{\varphi}_2-\cancel{m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_2^2(\varphi_1-\varphi_2)}+g l_1\varphi_1(m_1+m_2)=0.$

(2): $l_2^2\ddot{\varphi}_2 m_2+m_2 l_1 l_2\ddot{\varphi}_1+m_2 g l_2\varphi_2=0.$

$\Rightarrow$ El sistema queda:

$$\begin{cases} l_1^2\ddot{\varphi}_1(m_1+m_2)+m_2\cancel{l_1}l_2\ddot{\varphi}_2=-g\cancel{l_1}\varphi_1(m_1+m_2). \\ l_2^2\ddot{\varphi}_2\cancel{m_2}+\cancel{m_2}l_1\cancel{l_2}\ddot{\varphi}_1=-\cancel{m_2}g\cancel{l_2}\varphi_2. \rightarrow \ddot{\varphi}_2=\dfrac{-g\varphi_2-l_1\ddot{\varphi}_1}{l_2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow l_1\ddot{\varphi}_1(m_1+m_2)+m_2 l_2\left(-\frac{g\varphi_2}{l_2}-\frac{l_1\ddot{\varphi}_1}{l_2}\right)=-g\varphi_1(m_1+m_2).$$

$$\Rightarrow\ddot{\varphi}_1(l_1 m_1+\cancel{l_1 m_2}-\cancel{l_1 m_2})=m_2 g\varphi_2-g\varphi_1(m_1+m_2).$$

$$\ddot{\varphi}_2=-\frac{g}{l_2}\varphi_2-\frac{l_1}{l_2}\left[\frac{m_2 g(\varphi_2+\varphi_1)-m_1 g\varphi_1}{l_1 m_2}\right]$$

$$=-\frac{g\varphi_2}{l_2}-\frac{g}{l_2}(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{m_1 g}{l_2 m_2}\varphi_1.$$

$$=\varphi_2\frac{2g}{l_2}+\frac{\varphi_1\cdot g}{l_2}\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right).$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \dfrac{m_2 g}{l_1 m_1}\varphi_2 - \dfrac{g(m_1+m_2)}{l_1 m_1}\varphi_1 \\ \ddot{\varphi}_2 = -\dfrac{2g}{l_2}\varphi_2 + \dfrac{g}{l_2}\left(\dfrac{m_1}{m_2}+1\right)\varphi_1 . \end{cases}$$

A partir de acá se puede resolver tipo F2:

$\det(\mathbb{M} - \omega^2 \mathbb{I}) = 0$.

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{-g(m_1+m_2)}{l_1 m_1} & \dfrac{m_2 g}{l_1 m_1} \\ \dfrac{g}{l_2}\left(\dfrac{m_1}{m_2}+1\right) & -\dfrac{2g}{l_2} \end{pmatrix}$$

Proponemos soluciones tipo modos normales,

$\varphi_1(t) = A\cos(\omega t + \phi_1) + B\sin(\omega t + \phi_2)$

$\varphi_2(t) = \ldots$

y resolvemos

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{-g(m_1+m_2)}{l_1 m_1} - \omega^2 & \dfrac{m_2 g}{l_1 m_1} \\ \dfrac{g}{l_2}\left(\dfrac{m_1}{m_2}+1\right) & -\dfrac{2g}{l_2} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0 .$$