Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Guía 4: *Fuerzas centrales y dispersión.*

1. Sabemos que usted sabe que nosotros sabemos que usted ya vio la solución de este problema en la teórica, así que no intente escaparse. Para obtener y revalidar su título de Licenciado tiene que poder resolverlo sin ayuda en cualquier momento que se le pida, en todo el territorio nacional: encuentre la ecuación de la órbita $r(\varphi)$ para el movimiento de una partícula de masa m, con energía $-\mathcal{E} < 0$ y momento angular $l > 0$, en un potencial atractivo $V(r) = -k/r$, con $k > 0$. Caracterice la órbita (excentricidad e, semiejes a y b, etc.). Dé las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, $t(E)$ y $r(E)$, donde E es la excentricidad anómala. Averigüe, llegado el caso, qué es tal cosa.

2. Una partícula de masa m se mueve de manera acotada en un campo de **fuerzas** central $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$ con $k, c > 0$. Muestre que la ecuación de la órbita se escribe como

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\alpha\varphi},$$

donde e, a y α quedan en términos de $\mathcal{E}$ y l. Usted sabe que cuando $\alpha = 1$ ésta es la ecuación de una elipse. Muestre que cuando $\alpha \neq 1$, es una elipse que precede. La precesión se describe en términos de la velocidad de precesión del periápside, $\Delta\varphi_0$ por período de movimiento radial. Encuentre esta velocidad en función de α.

3. **Espirales de Cotes**. Una partícula de masa m se mueve en un potencial $V(r) = k/r^2$.

   a) Hallar la ecuación de la trayectoria como función de las constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y la energía $\mathcal{E} > 0$. Interpretar el movimiento en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Encontrar las asíntotas. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$? Verificar en tal límite que la solución hallada es la esperada en base a la primera ley de Newton.

   b) Suponer que el potencial es atractivo y que $l^2 < -2mk$ y $\mathcal{E} < 0$. Interpretar el movimiento en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno. (Tomar $\varphi_0 = 0$ en el punto de retorno r_0).

   c) Asimismo, analizar el caso $l^2 > -2mk > 0$.

4. El potencial de un oscilador isótropo es $V = kr^2/2$, con $k > 0$.

   a) Dibuje el potencial efectivo cuando el momento angular es distinto de cero.

   b) Describa los movimientos posibles.

   c) Encuentre la ecuación de la órbita $r(\varphi)$ y de la trayectoria $r(t)$ y $\varphi(t)$ en función de las condiciones iniciales (usted decide cuál es el instante inicial).

   d) ¿Puede resolver este problema en coordenadas cartesianas?

5. Una partícula de masa m se mueve en un campo de **fuerzas** $F(r) = -kr + c/r^3$, $k, c > 0$.

   a) Halle la ecuación de la órbita, $r(\varphi)$.

   b) Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c \to 0$ y $c \neq 0$.

   c) Discuta en qué casos la órbita es cerrada.

   d) Calcule la velocidad de precesión.

6. Bajo la acción de la gravedad $\mathbf{g} = -g\,\hat{z}$, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre la superficie de un cono definido por $\theta = \alpha < \pi/2$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo φ y el radio r de las coordenadas esféricas.

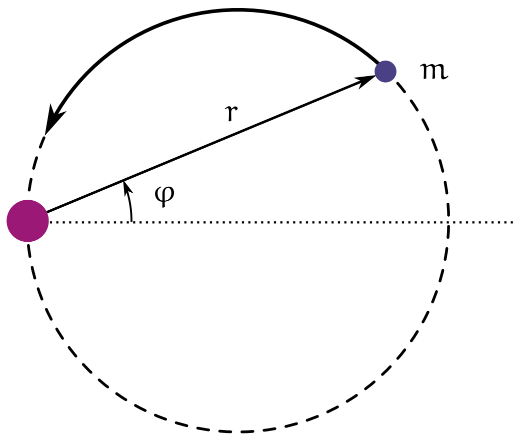
   b) Calcule el r máximo y el r mínimo para el caso en que $\alpha = 30°$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$.

   c) Escriba el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

   d) Suponiendo que la partícula está en movimiento circular, encuentre el período de las oscilaciones radiales para pequeñas perturbaciones alrededor de este movimiento. Compare el período de estas oscilaciones con el período de revolución y describa cualitativamente la órbita de la partícula.

7. Un satélite de masa m se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$, en una órbita circular de radio a. Súbitamente el valor de la constante k se reduce a la mitad. Encuentre la nueva órbita.

8. Un partícula. De masa m. Se acerca a un centro de fuerza. Fijo. El momento angular se conserva. La órbita es circular. Pero con una extraña propiedad. Pasa exactamente por el centro de fuerza. ¿Qué tipo de fuerza central –atractiva– puede explicar este movimiento? ¿Eh?



9. Para una partícula en movimiento elíptico alrededor de un centro de fuerzas gravitatorio, mostrar que su velocidad describe un círculo. Encontrar ese círculo. (En general, la curva descripta por la velocidad se llama hodógrafa).

10. *a*) Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares debido a su atracción gravitatoria. Suponga que el movimiento de las partículas es detenido *casi perfectamente*, quedando una pequeña velocidad tangencial. ¿En el límite en que esta velocidad se aproxima a cero, a qué tiende la órbita de las partículas?

    b) Si el período del movimiento original es τ y este movimiento es detenido súbitamente, las partículas caen una hacia la otra. ¿Cuánto tiempo tardan en chocar?

    c) ¿Cuánto tardaría la Tierra en caer al Sol si se frenara su movimiento orbital?

    d) En su libro El Paraíso Perdido, Milton refiere que Vulcano se precipitó desde el Cielo hasta la Tierra y que esa caída duró lo que dura la luz de un día de verano. Asuma que la duración del día corresponde a la isla de Lemnos. ¿A qué altura está, entonces, el Cielo? ¿Qué cotas supone este resultado a las exageraciones de los amantes que juran quererse hasta tal o cual altura, en especial comparado con la distancia a la Luna? Desprecie la resistencia del aire.

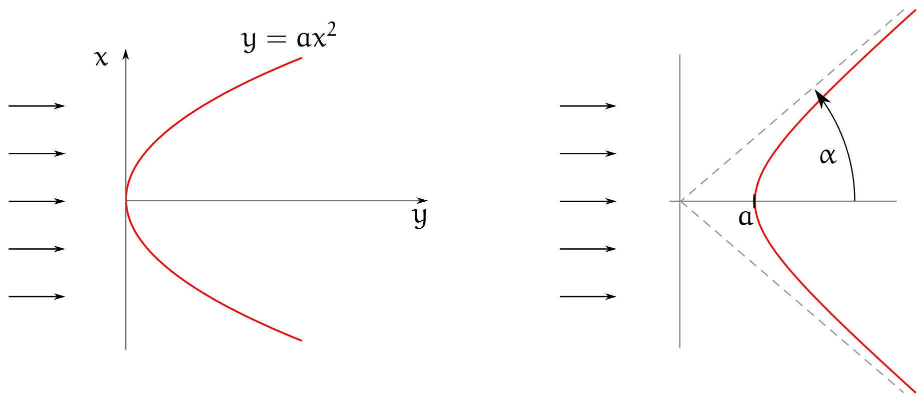
11. Calcule la sección eficaz diferencial y total para la dispersión de partículas por una esfera rígida de radio a. Para calcular el ángulo de dispersión considere dos métodos:

    - Use que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia. Justifique esta hipótesis.
    - Use la fórmula general para el ángulo de dispersión por un potencial $V(r)$ y analice el límite en que $V(r) = 0$ para $r > a$ y tiende a infinito para $r < a$.

12. Calcule la sección eficaz diferencial y total para la dispersión de partículas de masa m por un pozo de potencial esférico, con $V = 0$ para $r \geqslant a$ y $V = -V_0 < 0$ para $r < a$.

13. *a*) Calcule la sección eficaz diferencial para partículas que inciden sobre un paraboloide de revolución, con el cual chocan de manera elástica (figura de la izquierda).

    b) *Idem* para un hiperboloide de revolución (fig. der.). Analizar el límite $\alpha \to 0$.



14. Sobre una esfera rígida incide un haz de partículas. Las partículas que chocan contra la esfera son absorbidas con una probabilidad proporcional a la componente de su velocidad normal a la esfera. Las partículas que no son absorbidas rebotan elásticamente. Hallar las sección eficaz diferencial y la total.

15. *a*) En el ciclotrón de la CNEA se aceleran partículas α a una energía de 55 MeV. Se obtiene un haz de 0,5 nanoamperes de intensidad que se hace incidir sobre un blanco de oro de 0,5 mg/cm^2. A 20 cm del blanco y formando un ángulo de 5 grados con la dirección del haz incidente se coloca un detector de estado sólido, que cuenta todas las partículas que pasan por un orificio circular de 1 mm de diámetro. ¿Cuántas partículas se espera contar por segundo por efecto de la dispersión coulombiana?

    b) Para un núcleo formado por A nucleones, su radio viene dado aproximadamente por $R \approx 1{,}2A^{1/3}$ fm. ¿Podrán observarse entonces efectos nucleares? ¿Cómo se manifestarían dichos efectos?

Tenga en cuenta los siguientes datos:

- $1\ \mathrm{MeV} \approx 1{,}60 \times 10^{-6}$ ergios.
- $1\ \mathrm{fm} = 10^{-13}$ cm.
- Oro: ${}^{197}_{79}\mathrm{Au}$.
- Partículas α: ${}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$.
- Masa de los nucleones: $m \approx 1{,}67 \times 10^{-24}$ g.
- N_A = número de Avogadro $\approx 6{,}02 \times 10^{23}$.
- Magnitud de la carga del electrón: $e \approx 1{,}60 \times 10^{-19}$ C.
- $e^2 \approx 1{,}43 \times 10^{-13}$ MeV cm.