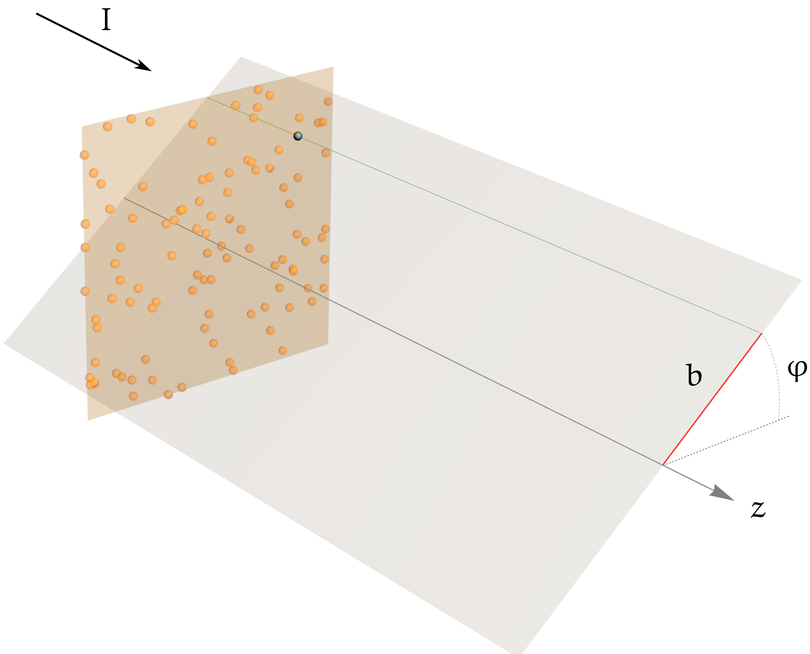
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase práctica del lunes 16/9. *Guía 4. Fuerzas centrales. Dispersión.*[*]

1. Lo que hay que saber escribir de buenas a primeras

En los problemas de dispersión de partículas, la cuestión fundamental es encontrar la relación que existe entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto.

En estas notas consideraremos únicamente problemas de dispersión con el centro de fuerza fijo. El problema se plantea así: desde el infinito inciden sobre el centro de fuerza partículas con una velocidad inicial $\mathbf{v} = v\,\hat{z}$. Todas las partículas tienen la misma velocidad, pero difieren en su parámetro de impacto b, que es la distancia que las separa del eje z, y difieren también en el plano en el que se mueven. Este plano puede ser caracterizado por el ángulo φ, como muestra la figura.



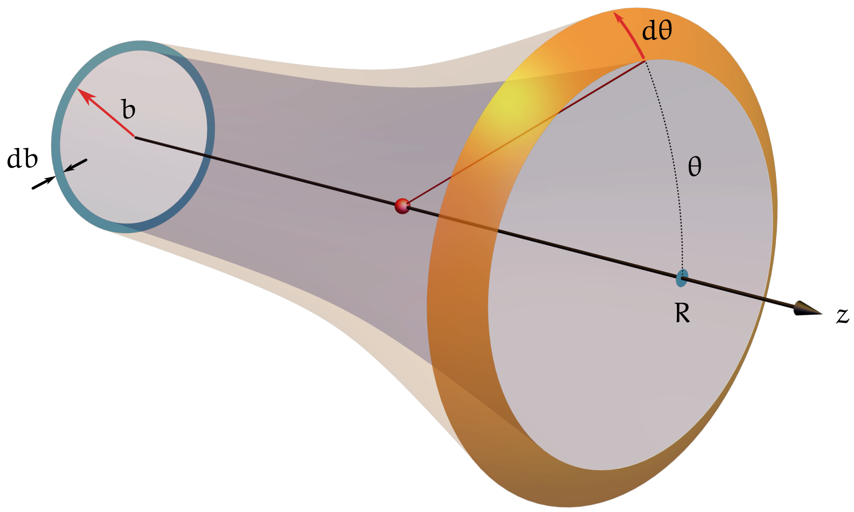
Inicialmente, las partículas están uniformemente distribuidas en un haz de intensidad I, donde I es el número de partículas *por unidad de área* y unidad de tiempo que atraviesa cualquier elemento de área perpendicular al haz. Lo que hay que averiguar es la intensidad $\mathcal{I}$ de partículas desviadas en una dirección θ cualquiera. A diferencia de la intensidad incidente, $\mathcal{I}$ es el número de partículas *por unidad de ángulo sólido* y por unidad de tiempo dispersadas

[*]Dirección de incidencia: zanellaj@df.uba.ar

en la dirección de θ. Como veremos, el problema se reduce a encontrar la función $b(\theta)$, donde θ es el ángulo de desviación de las partículas que inciden con parámetro de impacto b. Por ángulo de desviación se entiende el ángulo que la velocidad final forma con la velocidad inicial.

En la sección transversal del haz incidente, consideremos un elemento de área con forma de anillo, muy lejos del centro dispersor. Lo podemos caracterizar por su parámetro de impacto b y su ancho db, como muestra la figura. Su área vale

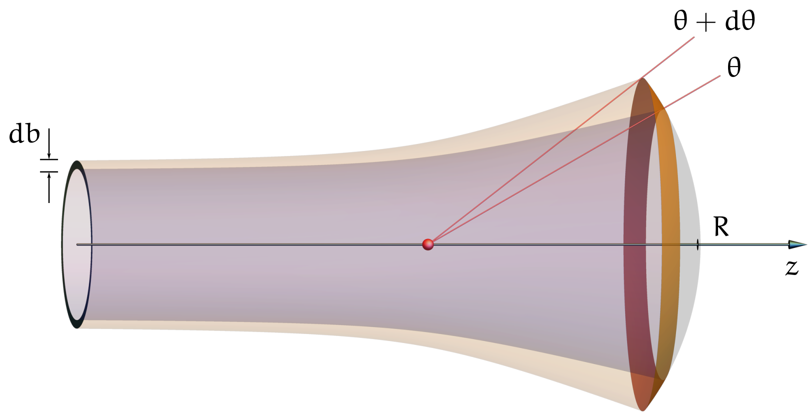
$$da = 2\pi b\, db. \tag{1}$$



El número de partículas que atraviesa este elemento de área por unidad de tiempo es

$$d\dot{N}_{\text{inc}} = 2\pi I b\, db. \tag{2}$$

Supongamos que para ese parámetro de impacto las partículas sean dispersadas en la dirección θ. El ángulo θ da la dirección de la velocidad final. Las partículas que atravesaron durante cierto intervalo de tiempo dt el elemento de área da, en el futuro lejano atravesarán el elemento de área $d\mathcal{A} = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin\theta\ d\theta$, donde R es arbitrariamente grande.



Puesto que el módulo de la velocidad final de las partículas es igual al módulo de su velocidad inicial, las partículas salientes también tardarán un intervalo dt en atravesar el elemento de área $d\mathcal{A}$. Así, el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo a través de $d\mathcal{A}$ será igual al número de partículas incidentes a través de da,

$$d\dot{N}_{\text{dis}} = d\dot{N}_{\text{inc}}. \tag{3}$$

Si definimos $\mathcal{I}$ como la intensidad de partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido, tendremos entonces

$$\mathcal{I}(\theta)d\Omega = 2\pi I b\, db. \tag{4}$$

Notar que la intensidad dispersada está definida por unidad de ángulo sólido, mientras que la incidente está definida por unidad de área. Luego,

$$\mathcal{I}(\theta) = \frac{Ib\, db}{d\Omega} = \frac{Ib\, db}{\sin\theta\ d\theta}, \tag{5}$$

donde hemos usado que

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta\ d\theta. \tag{6}$$

Antes de apresurarnos a escribir en el último término de la ec. (5) la derivada de b respecto de θ, que es lo que parecería dictar el cociente entre los dos diferenciales, hay que notar que en la definición de los elementos de área, tanto db como $d\theta$ se consideraron cantidades positivas. Sin embargo, la derivada de b respecto de θ puede tener cualquier signo. De esta forma se hace necesario establecer la siguiente relación:

$$\mathcal{I}(\theta) = I\, \frac{b\theta}{\sin\theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|. \tag{7}$$

Ahora bien, la intensidad I es un parámetro que corresponde a cada experimento en particular; no es una cantidad que caracterice a la interacción. Para independizarnos de la intensidad del haz incidente, lo que debemos calcular no es $\mathcal{I}$ sino $\mathcal{I}/I$, que es una magnitud propia del fenómeno de dispersión e independiente de si se usó un haz incidente de 1, 2 o n partículas por segundo por Å^2. Entonces definimos

$$\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|, \tag{8}$$

que recibe el nombre de sección eficaz diferencial de dispersión.

■ Comentario al margen: en verdad distintos valores del parámetro de impacto pueden dar lugar al mismo ángulo de dispersión θ. Entonces la intensidad por unidad de ángulo sólido en el haz dispersado debe calcularse sumando sobre todos los valores de b que produzcan el mismo valor de θ. La función $b(\theta)$ puede ser multivaluada y habrá que separarla en varias ramas. La fórmula para la sección diferencial debe reescribirse como

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \sum_i b_i(\theta) \left| \frac{db_i(\theta)}{d\theta} \right|, \tag{9}$$

donde la suma sobre i se extiende a todas las ramas de la función multivaluada b para las que exista una solución de la ecuación $\theta\big(b\big) = \theta$.

■ Otro comentario al margen: el formalismo es aplicable a problemas que no son necesariamente de fuerzas centrales sino que tienen sólo simetría de rotación respecto de la dirección del haz incidente. En la Guía, por ejemplo, se pide calcular las secciones eficaces de dispersión asociadas a ciertas superficies de revolución.

1.1. La interpretación de la sección eficaz diferencial

Todo lo anterior equivale a las realizar las mismas operaciones que uno haría si a una integral sobre b la transformase a una integral sobre θ. Lo que hemos establecido de forma encubierta es una ecuación de transformación de variables de integración. Incluso el hecho de tener que tomar el valor absoluto recuerda al jacobiano de un cambio de variables.

En los problemas de dispersión, en última instancia, uno quiere saber de qué manera el plano perpendicular al haz incidente se mapea sobre la superficie de una esfera de radio infinito: imaginen a las partículas incidentes como el haz de luz de un proyector. Piensen que están proyectando una foto estática. En el haz interponen el centro dispersor. Una gran pantalla esférica rodea todo el experimento. El objetivo de los problemas de dispersión es equivalente a encontrar la imagen que se proyecta sobre esta pantalla como resultado de la dispersión del haz original. Si no hubiera dispersión, en el fondo de la pantalla en la dirección $\theta = 0$ aparecería proyectada la foto original. Imaginen que ahora interponen distintos tipos de lentes. La imagen sobre la pantalla estará distorsionada pero será posible calcular qué fragmento del haz original fue a parar a una dada ubicación sobre esta pantalla esférica. El problema es aún más sencillo, porque en lugar de una foto complicada, lo que proyectan es un haz de intensidad uniforme. Sobre la pantalla esférica verán zonas circulares de distinta intensidad, y se trata de calcular esa intensidad en función de θ.

Con respecto a por qué se la llama sección eficaz: la palabra *sección* debe leerse como *área* y la palabra *eficaz*, como *equivalente*. Por construcción, $I\sigma(\theta)d\Omega$ es el número de partículas dispersadas que atraviesan el diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ por unidad de tiempo, y este número es igual al número de partículas que atraviesan por unidad de tiempo un elemento de área $da = 2\pi b\ db$ del haz incidente. Esto quiere decir que capturaríamos la misma cantidad de partículas por unidad de tiempo tanto si las atrapásemos al atravesar el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en el haz dispersado como si las atrapásemos al cruzar el elemento de área da en el haz incidente,

$$I\sigma(\theta)d\Omega = I da. \tag{10}$$

A esto lo podemos leer en la siguiente forma: $\sigma d\Omega$ es igual al diferencial de área del haz incidente por el que, en un dado tiempo, pasa el mismo número de partículas que el que pasa a través del elemento $d\Omega$ en el haz dispersado. En otras palabras: para atrapar el mismo número de partículas que atraviesan el diferencial de ángulo $d\Omega$ necesitaríamos interceptar las partículas que atraviesan un diferencial de área en el haz incidente igual a $\sigma d\Omega$. Esta es la razón de que se llame sección eficaz diferencial.

1.2. Comentario sobre la notación

Nosotros seguimos la notación que usa Goldstein. Sin embargo, debido a la interpretación que acabamos de dar, tiene más lógica la notación que usa Landau, que llama $d\sigma$ a lo que nosotros llamamos $\sigma d\Omega$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right| \qquad \text{(notación Landau).} \tag{11}$$

En la notación de Landau $d\sigma$ se interpreta directamente como un diferencial de área. En cambio, con la notación de Goldstein lo que tiene el valor de un diferencial de área es $\sigma d\Omega$.

Para enredar las cosas aún más, se define también la sección eficaz total que, en la notación de Goldstein, con muy poco juicio, es

$$\sigma_T = \int d\Omega\ \sigma. \tag{12}$$

En esta notación, la integral de σ da otro σ. Esto inclina las cosas en favor de la notación de Landau, en donde esta ecuación se leería, con mucha más coherencia, como

$$\sigma_T = \int d\sigma = \int d\Omega\ \frac{d\sigma}{d\Omega} \qquad \text{(notación Landau).} \tag{13}$$

Más sensatamente, con esta notación la integral de $d\sigma$ da σ_T. Nos atendremos a la notación de Goldstein. Quedan avisados por si en algún libro ven otra cosa.

2. El cálculo llevado a los hechos

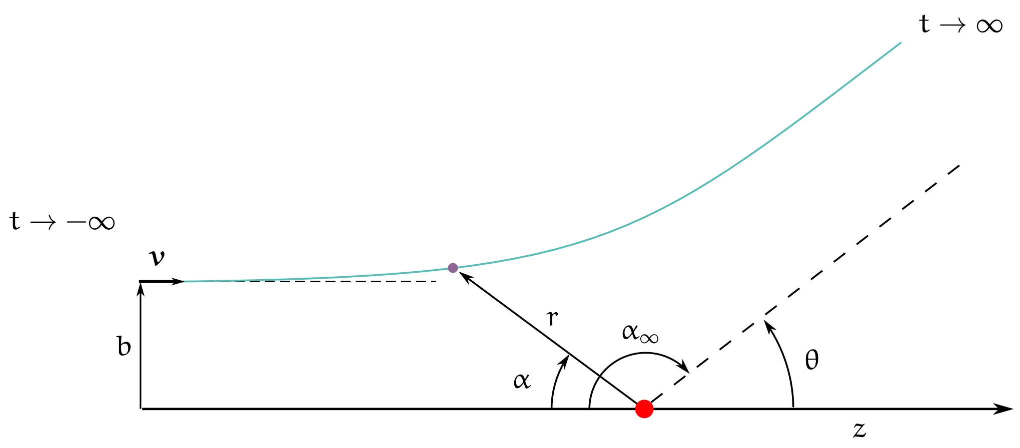
Debido a la simetría de rotación, para encontrar el ángulo de dispersión es suficiente considerar el movimiento de una partícula en un plano cualquiera que pase por el centro de fuerza. Consideremos una partícula en el haz incidente con parámetro de impacto b. En el problema bidimensional, debido nuevamente a la simetría de rotación, alcanza con considerar $b > 0$. La energía y momento angular de la partícula son

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2, \qquad l = mvb. \tag{14}$$

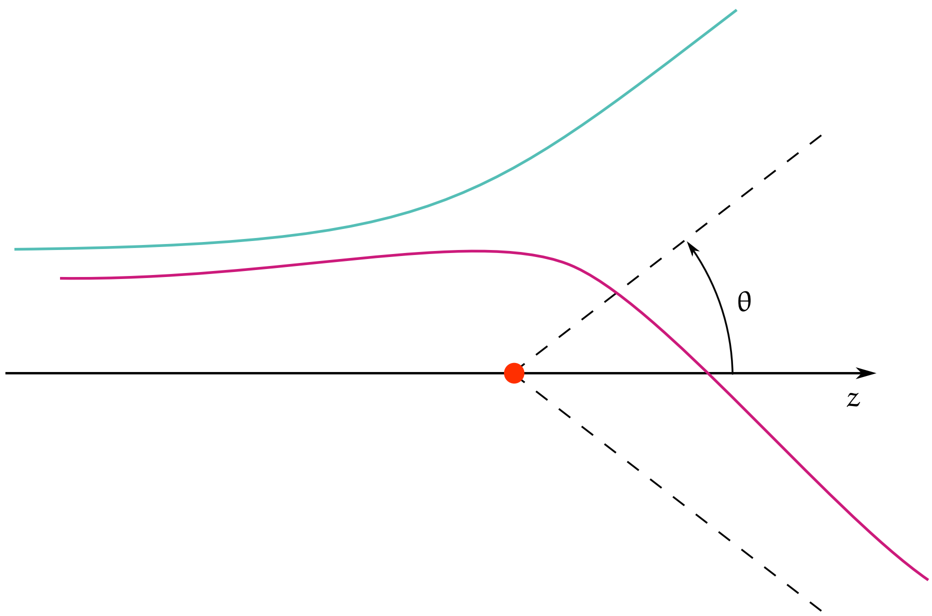
Es conveniente introducir un nuevo ángulo para describir la órbita de la partícula, tal como si resolviéramos un problema de fuerzas centrales. Llamemos α al ángulo medido desde la dirección inicial, como muestra la próxima figura. Notar que

$$\theta = |\pi - \alpha_\infty|, \tag{15}$$

donde α_∞ es el ángulo que da la dirección de la partícula cuando $t \to \infty$.



Asumimos que α_∞ se expresa como un ángulo entre 0 y 2π. El valor absoluto es necesario en la ec. (15), como lo hace patente la siguiente figura: las dos trayectorias dan lugar al mismo valor de θ que, por definición está siempre entre 0 y π. Pero en un caso es $\theta = \pi - \alpha_\infty$ y en el otro $\theta = \alpha_\infty - \pi$.

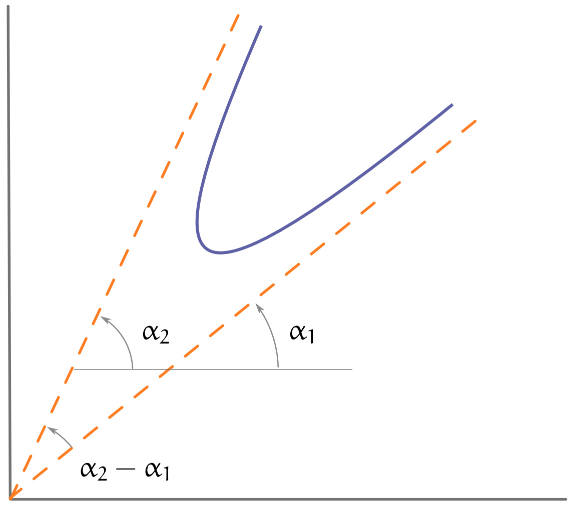


Si uno conoce la solución de la ecuación de la órbita, $r(\alpha)$, orientada de forma tal que para $\alpha = 0$ ocurra que $r \to \infty$, para encontrar el ángulo α_∞ bastará con buscar las soluciones de la ecuación

$$r(\alpha)^{-1} = 0, \tag{16}$$

una de las cuales corresponderá a $\alpha = 0$ y la otra a α_∞. Es común que la ecuación de la órbita se haya deducido con una elección de ejes que no se ajuste al problema de dispersión. Por ejemplo, es usual escribir la ecuación de la órbita eligiendo $\alpha = 0$ como el ángulo en el que r es mínimo. En el caso general, sea esta o no la elección de la orientación, el ángulo α_∞ siempre puede escribirse como la diferencia entre las dos raíces de la ecuación (16), como en la próxima figura.

También es frecuente que lo que esté más a mano sea la función $\alpha(r)$, que es una función bivaluada de r. Habrá que considerar la rama que corresponde al alejamiento de la partícula del centro de fuerza y evaluarla en $r \to \infty$, siempre que la asíntota de acercamiento se haya definido en $\alpha = 0$. Si no, valen los mismos reparos que en el párrafo anterior.



Si las ecuaciones $r(\alpha)$ o $\alpha(r)$ no son conocidas de antemano, y no hay interés en encontrarlas, la alternativa más sencilla es integrar la ecuación diferencial de la órbita entre $t \to -\infty$ y $t \to \infty$. Notar que el objetivo no es encontrar el valor de α para todo t, sino únicamente para $t \to \infty$. Esto suele ser un poco más simple que resolver la ecuación de la órbita en general.

Recordarán que la ecuación diferencial de la órbita se obtiene a partir de la ecuación de conservación de la energía para el problema unidimensional equivalente, cambiando de variable independiente de t a α. Eso se hace mediante la ecuación de conservación del momento angular. En menos de lo que tardan en leer este párrafo, deberían poder escribir la ecuación de la órbita como

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2m}{l^2}\left[\mathcal{E} - V(r)\right]. \tag{17}$$

De aquí

$$d\alpha = \pm \mathcal{G}(r)dr, \tag{18}$$

donde

$$\mathcal{G}(r) = \frac{1/r^2}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}\left[\mathcal{E} - V(r)\right] - \frac{1}{r^2}}}. \tag{19}$$

Inicialmente, cuando la partícula está infinitamente lejos del centro dispersor, $r \to \infty$ y $\alpha = 0$. El radio evoluciona de manera monótona desde $r \to \infty$ para $t \to -\infty$ hasta r_{min} para $t = 0$ (digamos) y luego desde r_{min} nuevamente hasta $r \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Si queremos integrar la ec. (18) para calcular $\alpha(r)$ debemos tener el cuidado de separar la función en dos ramas. Para cada valor de r habrá dos valores de α. Durante la etapa de acercamiento, para t entre menos infinito y cero, habrá que tomar el signo negativo en el segundo miembro de la ec. (18), debido a que α aumenta mientras r disminuye.

Análogamente, durante la etapa de alejamiento, para t entre cero e infinito, corresponde tomar el signo positivo. Con algunas simplificaciones sin importancia queda

$$\alpha(r) = \begin{cases} \displaystyle\int_r^\infty \mathcal{G}(r)\,dr, & t \leqslant 0; \\[2em] \displaystyle\int_{r_{\min}}^\infty \mathcal{G}(r)\,dr + \int_{r_{\min}}^r \mathcal{G}(r)\,dr, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{20}$$

Evidentemente, durante la primera mitad de la trayectoria el vector que da la posición de la partícula barre el mismo ángulo que durante la segunda mitad. El dibujo de la órbita es simétrico respecto de la recta $\alpha = \alpha(r_{\min})$.

En definitiva,

$$\alpha_\infty = 2\int_{r_{\min}}^\infty \frac{dr/r^2}{\sqrt{\dfrac{2m}{l^2}\left[\mathcal{E} - V(r)\right] - \dfrac{1}{r^2}}} \quad \text{mód } 2\pi. \tag{21}$$

Usando las ecs. (14) para escribir l^2 en términos de $\mathcal{E}$ obtenemos una expresión alternativa,

$$\alpha_\infty = 2\int_{r_{\min}}^\infty \frac{b\,dr/r^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V(r)}{\mathcal{E}} - \dfrac{b^2}{r^2}}} \quad \text{mód } 2\pi. \tag{22}$$

La operación mód 2π indica que hay que tomar el resto de la división de la integral por 2π, de modo que α_∞ sea un ángulo entre 0 y 2π. Prestar atención al hecho de que no tuvimos que resolver la ecuación de la órbita de manera general. Lo único que nos interesó fue encontrar α_∞, de manera que es suficiente calcular la integral (21) o la integral (22) y no las primitivas que aparecen en la ec. (20). Van a objetar que para calcular (21) o (22) necesitan las primitivas. La siguiente sección contesta a eso.

2.1. Una nota práctica

En la sección anterior integramos la ecuación de la órbita para la trayectoria completa. Según hemos dicho, necesitamos mucho menos que eso. Lo único que nos interesa es calcular la ec. (22). Podría pensarse que no hay una gran simplificación entre calcular la integral (22) y calcular las integrales que aparecen en la ec. (20). Después de todo no nos vamos a salvar de tener que calcular una primitiva. El hecho de que vamos a tener que calcular una primitiva es cierto, pero la vamos a evaluar en puntos tan especiales que todo el cálculo será inmediatamente más sencillo que si quisiéramos obtener la ecuación de la órbita completa. Uno de los puntos especiales es $r \to \infty$. Estarán de acuerdo en que tomar ese límite suele ser tarea fácil y simplificadora. Lo que no es tan evidente es que evaluar la primitiva en $r_{\min}$ es igual de simplificador.

En la ec. (22) parecería necesario tener que calcular primero $r_{\min}$. Esta es una cuenta molesta, porque requiere buscar las raíces de una ecuación de la forma

$$\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \mathcal{E}, \tag{23}$$

que es engorroso aunque se trate de una simple cuadrática. Pero, por lo común, al evaluar la integral (22), el radio $r_{\min}$ aparecerá como argumento de la función que hay dentro de la raíz cuadrada, es decir, a través de la expresión

$$1 - \frac{V(r_{\min})}{\mathcal{E}} - \frac{b^2}{r_{\min}^2}, \tag{24}$$

o de formas equivalentes, tales como

$$\frac{b^2/r_{\min}^2}{1 - \dfrac{V(r_{\min})}{\mathcal{E}}}. \tag{25}$$

Pero, por definición, $r_{\min}$ es el radio que hace que esta última expresión valga 1, o que la expresión (24) valga cero. Y eso es todo lo que necesita saberse acerca de $r_{\min}$:

$$1 - \frac{V(r_{\min})}{\mathcal{E}} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0. \tag{26}$$

2.2. La fórmula de Rutherford

Siguiendo con la sección anterior. Por ejemplo, tomemos el caso de la dispersión por un potencial $V(r) = k/r$, con $k > 0$. Sabemos que la trayectoria es una rama de hipérbola, de modo que el ángulo barrido por la partícula estará entre 0 y π, y no hará falta tomar $\text{mód } 2\pi$ al aplicar la fórmula (22). A partir de esta ecuación, cambiando de variables de r a $u = 1/r$ y completando cuadrados dentro de la raíz, resulta

$$\alpha_\infty = 2\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\,dr/r^2}{\sqrt{1 - \dfrac{k}{r\mathcal{E}} - \dfrac{b^2}{r^2}}} = 2\int_0^{r_{\min}^{-1}} \frac{b\,du}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{k}{2\mathcal{E}b}\right)^2 - b^2\left(u + \dfrac{k}{2\mathcal{E}b^2}\right)^2}}. \tag{27}$$

La última integral es elemental. El ingente resultado es

$$\alpha_\infty = 2\arcsin\left[\frac{b\left(r_{\min}^{-1} + \dfrac{k}{2\mathcal{E}b^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{k}{2\mathcal{E}b}\right)^2}}\right] - 2\arcsin\left[1 + \left(\frac{2\mathcal{E}b}{k}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{28}$$

Esta expresión es intimidante, pero en realidad el argumento del primer arco seno es igual a 1, porque es la ecuación que debe satisfacer $r_{\min}$. Luego,

$$\alpha_\infty = \pi - 2\arcsin\left[1 + \left(\frac{2\mathcal{E}b}{k}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{29}$$

Nunca fue necesario calcular $r_{\min}$. Por otro lado,

$$\theta = |\pi - \alpha_\infty| = 2 \arcsin \left[1 + \left(\frac{2\mathcal{E} b}{k} \right)^2 \right]^{-1/2}. \tag{30}$$

A partir de aquí escribimos b^2 como función de θ,

$$b^2 = \left[\left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2} - 1 \right] \frac{k}{2\mathcal{E}} = \left(\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right) \frac{k^2}{4\mathcal{E}^2}. \tag{31}$$

La ec. (31) es útil para calcular la sección eficaz diferencial debido a que la ec. (8) puede reescribirse como

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{d\cos\theta} \right|. \tag{32}$$

Así resulta,

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{4\mathcal{E}^2} \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{k^2}{16\mathcal{E}^2} \left(\csc \frac{\theta}{2} \right)^4 = \left(\frac{k}{2mv^2} \right)^2 \left(\csc \frac{\theta}{2} \right)^4, \tag{33}$$

que es la conocida fórmula de Rutherford.

■ Según dijimos hay más de una manera de encontrar α_∞. Lo que hicimos recién corresponde a calcular $\alpha(r)$. Pero si ya conocemos la ecuación de la órbita, $r(\alpha)$, podemos usarla igualmente para calcular α_∞. En el caso del potencial coulombiano repulsivo es

$$r(\alpha) = \frac{l^2/mk}{e \cos\alpha - 1}, \tag{34}$$

donde α se toma igual a cero en el punto que corresponde al radio mínimo, y donde

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}}. \tag{35}$$

Las direcciones asintóticas se obtienen buscando los valores de α que anulen el denominador. En este caso es

$$\alpha_\pm = \pm \arccos \frac{1}{e}. \tag{36}$$

Como muestra la próxima figura, el ángulo entre las dos asíntotas es α_∞. Luego,

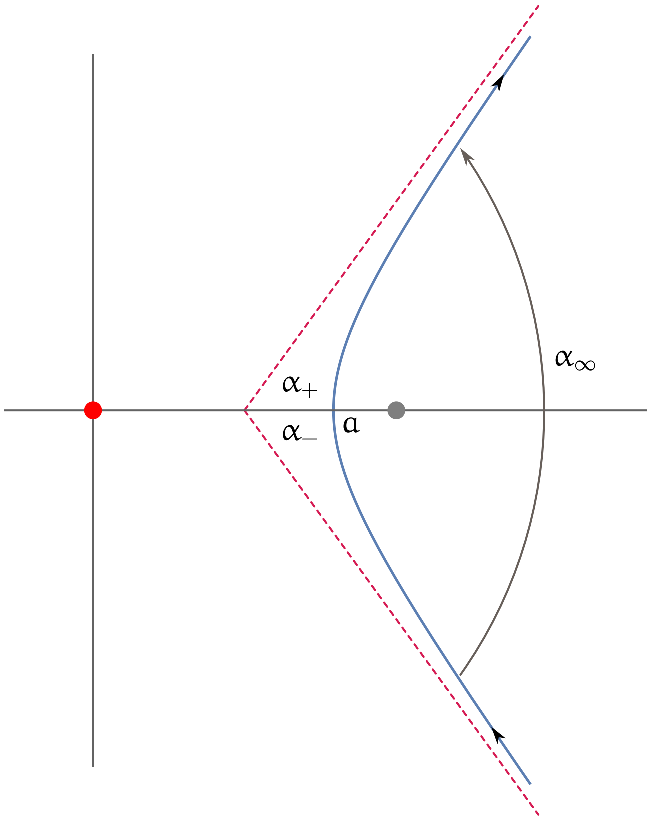
$$\alpha_\infty = 2 \arccos \frac{1}{e}. \tag{37}$$

Usando la relación

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \tag{38}$$

encontramos, igual que en la ec. (29),

$$\alpha_\infty = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{e}. \tag{39}$$



α_{∞}
α_{+}
α_{-}
a