1. Repaso Teórico

Para realizar la aproximación de pequeñas oscilaciones en un sistema mecánico, se parte de un Lagrangiano de la forma

$$L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q_1, ..., q_n) \ \dot{q}_i \ \dot{q}_j - V(q_1, ..., q_n), \tag{1}$$

el cual se obtiene cuando solo hay vínculos independientes del tiempo. Además, hay que suponer que existe un punto de equilibrio que se da cuando $q_1, ..., q_n = 0$ (si no, hay que hacer los cambios de variables $q_k\,' = q_k - q_k^{(eq)}$). Esto no es otra cosa más que pedir que

$$\frac{\partial V}{\partial q_k}(q_1 = 0, ..., q_n = 0) = 0 \ \forall \ 1 \leq k \leq n.$$

Por otro lado, como el potencial está definido a más de una constante, se puede elegir la misma para que

$$V(q_1 = 0, ..., q_n = 0) = 0.$$

Por lo tanto, en la aproximación de pequeños apartamientos respecto del equilibrio se puede escribir

$$V(q_1, ..., q_n) \simeq \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_1 = 0, ..., q_n = 0) \ q_i \ q_j.$$

Por ende, aproximando las g_{ij} a orden cero

$$g_{ij}(q_1, ..., q_n) \simeq g_{ij}(q_1 = 0, ..., q_n = 0)$$

el Lagrangiano del sistema queda escrito como

$$L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) \simeq \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} \ \dot{q}_i \ \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} \ q_i \ q_j, \tag{2}$$

donde

$$T_{ij} = g_{ij}(q_1 = 0, ..., q_n = 0)$$

y

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_1 = 0, ..., q_n = 0).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en notación matricial quedan entonces

$$T \ \ |\ddot{q}\rangle + V \ \ |q\rangle = 0,$$

donde T y V son las matrices con coeficientes T_{ij} y V_{ij} respectivamente mientras que

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y por lo tanto la solución es una combinación lineal de modos normales dados por

$$|q\rangle\,(\omega) = |A\rangle \ \ e^{i \ \omega \ t},$$

donde

$$(V - \omega^2 \ T)\,|A\rangle = 0. \tag{3}$$

Se demuestra que tanto T como V son simétricas (para V la demostración es trivial) y si el equilibrio es estable, V es definida positiva. Con todo esto se prueba que las frecuencias de los modos normales resultan ser reales.

2. Péndulo Doble

El lagrangiano del péndulo doble ya es escribió en una clase previa para masas y longitudes generales y en este caso resulta ser

$$L = 2\ m\ l^2\ \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\ m\ l^2\ \dot{\varphi}_2^2 + m\ l^2\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ \dot{\varphi}_1\ \dot{\varphi}_2 + 4\ m\ g\ l\ \cos\varphi_1 + m\ g\ l\ \cos\varphi_2,$$

donde φ_1 y φ_2 son los ángulos de las sogas respecto a la vertical. Para $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ el sistema se encuentra en un equilibrio estable y por lo tanto se puede hacer la aproximación de pequeñas oscilaciones (además el lagrangiano se escribe como en la Ecuación (1)).

Si se quiere escribir el Lagrangiano como en la Ecuación (2) hay que aproximar

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \simeq 1,$$

$$\cos\varphi_1 \simeq 1 - \frac{\varphi_1^2}{2},$$

$$\cos\varphi_2 \simeq 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}.$$

Haciendo esto se obtiene

$$L = 2\ m\ l^2\ \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\ m\ l^2\ \dot{\varphi}_2^2 + m\ l^2\ \dot{\varphi}_1\ \dot{\varphi}_2 + 5\ m\ g\ l - 2\ m\ g\ l\ \varphi_1^2 - \frac{1}{2}\ m\ g\ l\ \varphi_2^2,$$

o bien, re definiendo la constante del potencial,

$$L = 2\ m\ l^2\ \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\ m\ l^2\ \dot{\varphi}_2^2 + m\ l^2\ \dot{\varphi}_1\ \dot{\varphi}_2 - 2\ m\ g\ l\ \varphi_1^2 - \frac{1}{2}\ m\ g\ l\ \varphi_2^2.$$

Viendo el lagrangiano, se puede deducir que

$$T = \begin{pmatrix} 4\ m\ l^2 & m\ l^2 \\ m\ l^2 & m\ l^2 \end{pmatrix} = m\ l^2\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$V = \begin{pmatrix} 4\ m\ g\ l & 0 \\ 0 & m\ g\ l \end{pmatrix} = m\ g\ l\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La Ecuación (3) queda entonces

$$\left[m\ g\ l\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - m\ l^2\ \omega^2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0,$$

o bien

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Pidiendo que el determinante de la matriz se anule se llega a

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

o

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Péndulos Acoplados por un Resorte

Tomando como origen de coordenadas el punto de apoyo del péndulo de la izquierda, el eje x hacia abajo y el eje y hacia la derecha, las posiciones de las dos masas se escriben como

$$\overline{r}_1 = l\ \cos\varphi_1\ \hat{x} + l\ \sin\varphi_1\ \hat{y},$$

$$\overline{r}_2 = l_0\ \hat{y} + l\ \cos\varphi_2\ \hat{x} + l\ \sin\varphi_2\ \hat{y}.$$

Habiendo hecho esto y sabiendo que

$$\begin{gathered} |\overline{r}_2 - \overline{r}_1| = \sqrt{l^2\ (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2 + [l_0 + l\ (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)]^2} \\ = \sqrt{l^2\ (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2 + l^2\ (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2 + 2\ l_0\ l\ (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) + l_0^2} \\ = \sqrt{2\ l^2\ (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) + 2\ l_0\ l\ (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) + l_0^2} \end{gathered}$$

es fácil demostrar que el lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{2}\ m\ l^2\ (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + m\ g\ l\ (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) - \frac{1}{2}\ k\ (\sqrt{2\ l^2\ (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) + 2\ l_0\ l\ (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) + l_0^2} - l_0)^2.$$

A partir de acá conviene empezar con las aproximaciones. En primera instancia se hará

$$\cos\varphi_1 \simeq 1 - \frac{\varphi_1^2}{2},$$

$$\cos\varphi_2 \simeq 1 - \frac{\varphi_2^2}{2},$$

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \simeq 1 - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2},$$

$$\sin\varphi_1 \simeq \varphi_1,$$

$$\sin\varphi_2 \simeq \varphi_2.$$

Con esto, el lagrangiano queda

$$\begin{gathered} L = \tfrac{1}{2}\ m\ l^2\ (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + m\ g\ l\ (2 - \tfrac{\varphi_1^2}{2} - \tfrac{\varphi_2^2}{2}) \\ -\tfrac{1}{2}\ k\ (\sqrt{l^2\ (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + 2\ l_0\ l\ (\varphi_2 - \varphi_1) + l_0^2} - l_0)^2. \end{gathered}$$

Hecho esto, notar que

$$l^2\ (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + 2\ l_0\ l\ (\varphi_2 - \varphi_1) + l_0^2 = [l\ (\varphi_2 - \varphi_1) + l_0]^2$$

y por lo tanto (sabiendo que para ángulos pequeños lo de adentro del cuadrado es positivo)

$$L = \frac{1}{2}\ m\ l^2\ (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + m\ g\ l\ (2 - \frac{\varphi_1^2}{2} - \frac{\varphi_2^2}{2}) - \frac{1}{2}\ k\ l^2\ (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

o bien eliminando la constante

$$L = \frac{1}{2}\ m\ l^2\ (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2}\ [m\ g\ l\ (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + k\ l^2\ (\varphi_2 - \varphi_1)^2].$$

Viendo el lagrangiano, se puede deducir que

$$T = \begin{pmatrix} m\ l^2 & 0 \\ 0 & m\ l^2 \end{pmatrix} = m\ l^2\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$V = \left(\begin{array}{cc} m\ g\ l + k\ l^2 & -k\ l^2 \\ -k\ l^2 & m\ g\ l + k\ l^2 \end{array} \right) = m\ l^2\ \left(\begin{array}{cc} \omega_0^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 \end{array} \right),$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

y

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La Ecuación (3) queda entonces

$$\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)\ \omega^2 - \left(\begin{array}{cc} \omega_0^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 \end{array} \right) \right]\ \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = 0.$$

Pidiendo que el determinante de la matriz se anule se llega a

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right),$$

o

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\ \Omega^2} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right).$$

La solución se escribe entonces de la siguiente manera

$$\varphi_1(t) = C_1\ \cos(\omega_1\ t) + D_1\ \sin(\omega_1\ t) + C_2\ \cos(\omega_2\ t) + D_2\ \sin(\omega_2\ t),$$

$$\varphi_2(t) = C_1\ \cos(\omega_1\ t) + D_1\ \sin(\omega_1\ t) - C_2\ \cos(\omega_2\ t) - D_2\ \sin(\omega_2\ t),$$

donde ω_1 y ω_2 son las dos frecuencias halladas previamente.
Las condiciones iniciales del problema son

$$\varphi_1(0) = \varphi_{10},\ \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_{10}, \tag{4}$$

$$\varphi_2(0) = 0,\ \dot{\varphi}_2(0) = 0. \tag{5}$$

Usando la Ecuación (5) se llega a

$$C_1 = C_2 = C,$$

$$\omega_1\ D_1 = \omega_2\ D_2 \Rightarrow D_1 = \omega_2\ D,\ D_2 = \omega_1\ D.$$

Por ende se puede escribir

$$\varphi_1(t) = C\ (\cos(\omega_1\ t) + \cos(\omega_2\ t)) + D\ (\omega_2\ \sin(\omega_1\ t) + \omega_1\ \sin(\omega_2\ t)),$$

$$\varphi_2(t) = C\ (\cos(\omega_1\ t) - \cos(\omega_2\ t)) + D\ (\omega_2\ \sin(\omega_1\ t) - \omega_1\ \sin(\omega_2\ t)).$$

Por último, usando la Ecuación (4) se llega a

$$2\ C = \varphi_{10},$$

$$2\ D\ \omega_1\ \omega_2 = \dot{\varphi}_{10}.$$

Por lo tanto, finalmente la solución está dada por

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_{10}}{2}\ (\cos(\omega_1\ t) + \cos(\omega_2\ t)) + \frac{\dot{\varphi}_{10}}{2}\ (\frac{1}{\omega_1}\ \sin(\omega_1\ t) + \frac{1}{\omega_2}\ \sin(\omega_2\ t)),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_{10}}{2}\ (\cos(\omega_1\ t) - \cos(\omega_2\ t)) + \frac{\dot{\varphi}_{10}}{2}\ (\frac{1}{\omega_1}\ \sin(\omega_1\ t) - \frac{1}{\omega_2}\ \sin(\omega_2\ t)).$$