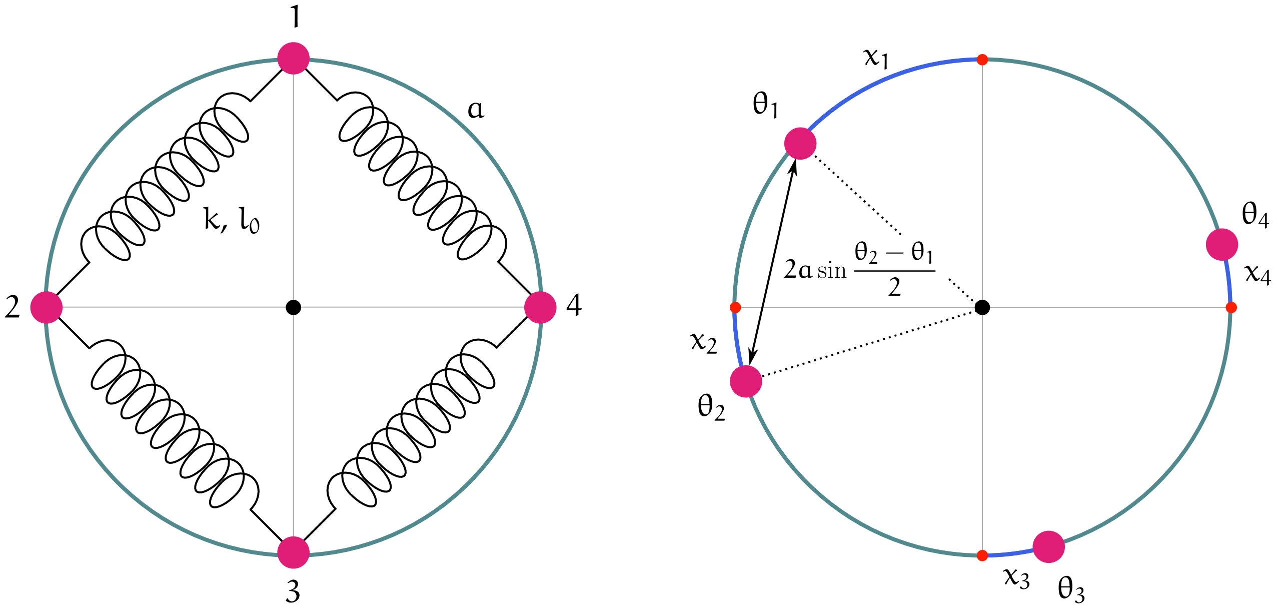
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase práctica del lunes 23/9. *Guía 5. Pequeñas oscilaciones.*[*]

Variación sobre los problemas 7 y 9

Como muestra la figura de la izquierda, se trata de cuatro partículas de masa m que se mueven sobre un aro fijo de radio a. Las partículas interactúan a través de resortes de constante elástica k y longitud natural l_0. Estos resortes están sobre las secantes que unen a las partículas.



De esta manera nos queda un problema que requiere linealización, como el problema 7; que tiene frecuencias nulas, como ambos problemas; y que tiene frecuencias degeneradas, como el problema 9. Estas dos últimas características estuvieron ausentes en los dos problemas que resolvimos la clase pasada.

Por simetría, la configuración en forma de cuadrado es de equilibrio. Es indiferente la orientación del cuadrado. En estos casos, una alternativa es elegir arbitrariamente, entre las infinitas configuraciones equivalentes, una configuración de referencia y hacer pequeñas oscilaciones alrededor de esta última. Tomaremos como configuración de referencia la que muestra la figura de la izquierda.

Las partículas en el aro pueden ser caracterizadas por los cuatro ángulos θ_i, medidos a partir de la posición de equilibrio de la primera partícula. Las coordenadas de pequeñas oscilaciones x_i miden la diferencia entre el ángulo de la partícula i y su ángulo de equilibrio, como muestra la figura de la derecha. Por hipótesis los ángulos x_i son pequeños, de manera

[*] zanellaj@df.uba.ar

que no necesitamos preocuparnos porque una partícula cruce sobre otra. Por construcción, será entonces

$$\theta_1 = x_1, \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + x_2, \qquad \theta_3 = \pi + x_3, \qquad \theta_4 = \frac{3\pi}{2} + x_4. \tag{1}$$

La energía cinética es

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m a^2 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2\right). \tag{2}$$

Por otro lado, la energía potencial es una función de la distancia entre las partículas,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{k}{2}\left[(l_{21} - l_0)^2 + (l_{32} - l_0)^2 + (l_{43} - l_0)^2 + (l_{14} - l_0)^2\right], \tag{3}$$

donde l_{ij} es la distancia entre las partículas i y j, igual a la longitud de la secante que las une. Para las primeras dos partículas es

$$l_{21} = 2a\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = 2a\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x_2 - x_1}{2}\right). \tag{4}$$

Del mismo modo se obtiene

$$l_{32} = 2a\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x_3 - x_2}{2}\right), \tag{5}$$

$$l_{43} = 2a\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x_4 - x_3}{2}\right), \tag{6}$$

$$l_{14} = 2a\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x_1 - x_4}{2}\right). \tag{7}$$

Para la última igualdad se usó que el ángulo entre las partículas 1 y 4 es igual a

$$2\pi + x_1 - \left(\frac{3\pi}{2} + x_4\right) = \frac{\pi}{2} + x_1 - x_4. \tag{8}$$

Tenemos que desarrollar V hasta orden cuadrático en las coordenadas de pequeñas oscilaciones. Consideremos el primer término en la ec. (3). Definiendo $x_{21} = x_2 - x_1$, si conservamos términos hasta orden x_i^2 obtenemos

$$(l_{21} - l_0)^2 = \left[2a\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x_{21}}{2}\right) - l_0\right]^2 \simeq \left\{\sqrt{2}a\left[1 + \frac{x_{21}}{2} - \frac{x_{21}^2}{8}\right] - l_0\right\}^2 \tag{9}$$

$$\simeq \left(\sqrt{2}a - l_0\right)^2 + 2\sqrt{2}a(\sqrt{2}a - l_0)\left(\frac{x_{21}}{2} - \frac{x_{21}^2}{8}\right) + \frac{a^2 x_{21}^2}{2} \tag{10}$$

$$= \left(\sqrt{2}a - l_0\right)^2 + \sqrt{2}a(\sqrt{2}a - l_0)x_{21} + \frac{a l_0}{2\sqrt{2}} x_{21}^2. \tag{11}$$

Cuando se suman los cuatro términos que aparecen en la energía potencial, los términos lineales se cancelan, puesto que es

$$x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{14}=x_2-x_1+x_3-x_2+x_4-x_3+x_1-x_4=0. \tag{12}$$

Así, hasta orden cuadrático queda

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=V_0+\frac{a l_0 k}{4\sqrt{2}}\left[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2+(x_4-x_3)^2+(x_1-x_4)^2\right], \tag{13}$$

donde $V_0=2k(\sqrt{2}a-l_0)^2$. Esta constante puede omitirse en todos los cálculos que siguen. Es interesante notar que si fuera $l_0=0$, el potencial no tendría término cuadrático, quedado fuera del alcance de la teoría de las oscilaciones lineales.

El lagrangiano de pequeñas oscilaciones se lee como

$$\begin{aligned}\frac{1}{ma^2}\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})=&\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2+\dot{x}_4^2\right)-\\ &\frac{1}{2}\omega_0^2\left[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2+(x_4-x_3)^2+(x_1-x_4)^2\right],\end{aligned} \tag{14}$$

con

$$\omega_0^2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{l_0}{a}\frac{k}{m}. \tag{15}$$

¿Las unidades?, bien. Da lo mismo trabajar con $\mathcal{L}$ que con $\mathcal{L}/ma^2$, al que seguiremos llamando $\mathcal{L}$. Prestar atención a ese paso: simplifica las cuentas. Escrito en forma matricial

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbb{T}\cdot\dot{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbb{V}\cdot\mathbf{x}. \tag{16}$$

La matriz energía cinética es diagonal

$$\mathbb{T}=\mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{17}$$

La matriz potencial tiene términos cruzados. Es fácil ver que

$$\mathbb{V}=\omega_0^2\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Recordemos que, en general, las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano de la forma (16) son

$$\mathbb{T}\cdot\ddot{\mathbf{x}}+\mathbb{V}\cdot\mathbf{x}=0. \tag{19}$$

Proponiendo soluciones de la forma $x = e^{i\omega t}\mathbf{A}$, resulta la ecuación

$$\left[\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}\right] \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{20}$$

Para que haya soluciones no triviales, debe ser cero el determinante de la matriz $\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}$. En el caso del problema que estamos resolviendo, esto implica que

$$\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{21}$$

donde

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2. \tag{22}$$

Calcular el determinante de la ec. (21) es más sencillo de lo que parece. Recordemos que el valor del determinante no cambia si a una fila se le suma otra, y que si a una fila se la multiplica por una constante el determinante se multiplica por la misma constante. Así, si a la primera fila la restamos la tercera, y a la segunda la cuarta, queda

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Si ahora a la última fila la multiplicamos por λ y le restamos la primera,

$$\lambda\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Mediante un par más de operaciones sería posible reducir la matriz a una de tipo triangular, pero ya es suficiente con lo que tenemos. Pueden verificar que

$$\lambda\Delta = \lambda \times \lambda^2(\lambda^2 - 4). \tag{25}$$

De aquí obtenemos las cuatro raíces de $\Delta = 0$, dos de las cuales son degeneradas:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \tag{26}$$

Usando la ec. (22), las frecuencias propias correspondientes son

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2\omega_0, \quad \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{2}\omega_0. \tag{27}$$

Para escribir las ecuaciones que dan las componentes de los autovectores, podemos usar las matrices simplificadas, ya que las operaciones hechas corresponden a combinaciones lineales de las ecuaciones originales. El cuidado que hay que tener es el de usar aquellas matrices en cuya construcción no haya intervenido la multiplicación por $\lambda - \lambda_i$. La matriz en la ec. (23) sirve a nuestros propósitos. Escribiremos todos los autovectores en la forma

$$\mathbf{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Para no multiplicar la notación, usaremos las mismas letras a, b, c y d al hablar de cualquiera de los autovectores.

Para el autovalor λ_1 encontramos

$$a = b = c = d. \tag{29}$$

Tenemos la libertad de elegir la constante común a las cuatro componentes, siempre que no sea cero. Lo más sencillo parece ser

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Para el autovalor λ_2,

$$a = -b = c = -d, \tag{31}$$

y el autovector es

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Para el par de autovalores degenerados, el sistema queda doblemente indeterminado, fijando únicamente una relación entre pares de componentes

$$a = -c, \quad b = -d. \tag{33}$$

Cuando pasa algo así, se tiene la libertad de elegir, dentro de la clase de vectores que satisfacen estas ecuaciones, dos vectores linealmente independientes cualesquiera. Lo más práctico es elegirlos ortogonales respecto de $\mathbb{T}$; es decir, elegir $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ tales que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}' = 0. \tag{34}$$

La razón detrás de esta elección es para que siga valiendo la misma relación general que entre autovectores de autovalores diferentes. Cualquier par de autovectores correspondientes a diferentes autovalores satisface esa relación de ortogonalidad. Entonces es conveniente extender esa propiedad a los autovectores de los autovalores degenerados (aunque bastaría con elegirlos linealmente independientes).

En nuestro caso, la matriz $\mathbb{T}$ es la identidad, lo que implica que la ortogonalidad es respecto al producto escalar usual. Dos vectores que satisfacen las ecs. (33) y que son a la vez ortogonales entre sí son

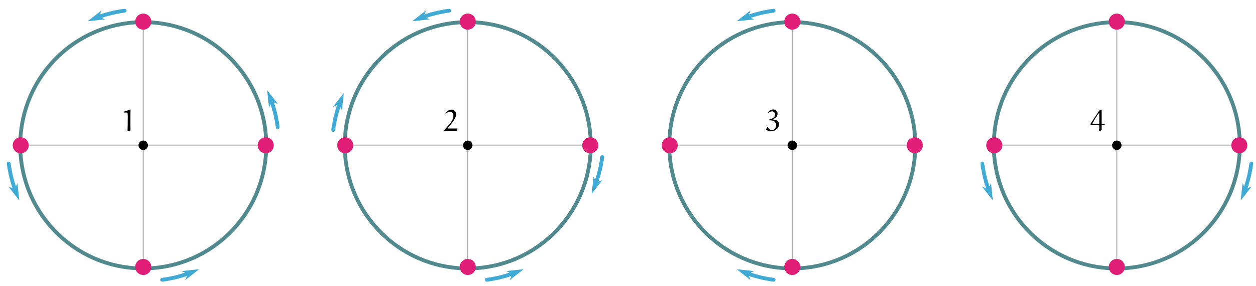
$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Notar que los cuatro autovectores así construidos son ortogonales. Según señalamos antes, esta ortogonalidad, en el caso general, es respecto a la matriz $\mathbb{T}$,

$$\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(j)} = 0. \tag{36}$$

Algunos comentarios:

■ La figura muestra esquemáticamente el movimiento de las masas cuando oscilan en un modo determinado. Cada vector $\mathbf{A}^{(i)}$ da las amplitudes relativas. Como veremos enseguida, el primer modo es en realidad un movimiento de traslación rígida.



■ El modo correspondiente a $\omega = 0$ no corresponde a una solución del problema de pequeñas oscilaciones. Su existencia está relacionada al hecho de que el equilibrio sea indiferente a la orientación de las masas, siempre que formen un cuadrado. La solución relacionada con $\omega = 0$ es la del movimiento rígido de las cuatro masas con velocidad angular constante

$$\theta_i = \Omega t + \theta_{i0}. \tag{37}$$

En un momento veremos como excluir este modo de rotación rígida de la solución general del problema de pequeñas oscilaciones.

■ La solución general de las ecuaciones de movimiento para el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 + C_1' t)\,\mathbf{A}^{(1)} + \sum_{i=2}^{4} (C_i \cos\omega_i t + C_i' \sin\omega_i t)\,\mathbf{A}^{(i)}. \tag{38}$$

Las constantes de integración se obtienen a partir de las condiciones iniciales. Aquí resulta muy útil la ortogonalidad de los autovectores. Evaluando las posiciones en $t = 0$, es fácil ver que para todos los modos vale

$$C_i = \frac{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{x}(0)}{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{39}$$

La condición para la velocidad inicial requiere tratar separadamente al modo de frecuencia cero. Por un lado es

$$C_1' = \frac{\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbb{T} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0)}{\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(1)}}, \tag{40}$$

mientras que, para $i = 2, 3, 4$, resulta

$$C_i' = \frac{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0)}{\omega_i \mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{41}$$

La diferencia está en el factor ω_i dividiendo en la última ecuación.

Para excluir el modo de rotación rígida deben anularse C_1 y C_1'. Teniendo en cuenta las formas de $\mathbf{A}^{(1)}$ y de $\mathbb{T}$, ecs. (17) y (30), eso implica que las condiciones iniciales satisfagan

$$C_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i(0) = 0, \qquad C_1' = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i(0) = 0. \tag{42}$$

Si se tratase de un movimiento unidimensional sobre el eje x, diríamos que estas ecuaciones son equivalentes a pedir que el centro de masa esté en $x = 0$ y que su velocidad sea 0.

■ Las coordenadas normales η_i son aquellas combinaciones lineales de las coordenadas x_i que separan completamente el lagrangiano,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_i^2 - \omega_i^2 \eta_i^2\right). \tag{43}$$

Sus ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta = 0. \tag{44}$$

Para obtener cuáles son estas combinaciones lineales, podemos reescribir la solución general (38) como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\mathbf{A}^{(i)} f_i(t)}{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{45}$$

Por construcción las funciones f_i satisfacen las ecuaciones diferenciales (44), de manera que si logramos despejar las funciones f_i del sistema de ecs. (45) obtendremos, salvo por una constante multiplicativa, las combinaciones η_i. Usando la ortogonalidad de los autovectores, encontramos

$$f_i(t) = \mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{x}(t). \tag{46}$$

Explícitamente, resulta

$$f_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \tag{47}$$

$$f_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \tag{48}$$

$$f_3 = x_1 - x_3, \tag{49}$$

$$f_4 = x_2 - x_4. \tag{50}$$

Cada coordenada normal η_i es proporcional a la combinación lineal correspondiente. Lo que fija la constante de proporcionalidad es que todas las $\dot{\eta}_i^2$ aparezcan en el lagrangiano con un coeficiente igual a 1. Usando la ortogonalidad entre los autovectores, tenemos

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{x} = \sum_i^4 \frac{\dot{f}_i^2}{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{51}$$

Esto muestra que debemos elegir

$$\eta_i = \frac{f_i}{\sqrt{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}} = \frac{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}}. \tag{52}$$

En el caso particular de este problema, queda

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \tag{53}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \tag{54}$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3), \tag{55}$$

$$\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_4). \tag{56}$$