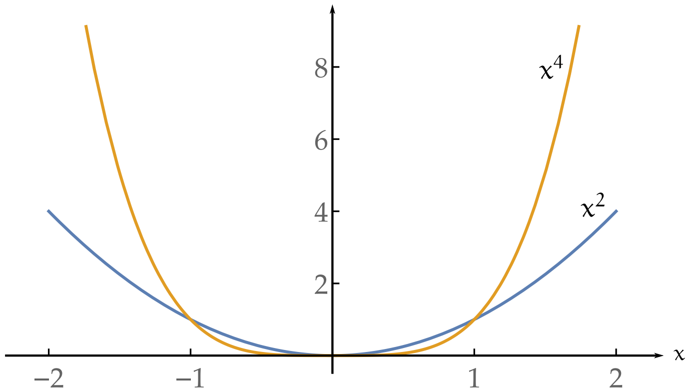
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase práctica del lunes 2/9. *Guía 3. Problemas variacionales. Métodos directos.*[*]

■ **Problema 5**. Se propone considerar el movimiento unidimensional de una partícula de masa m en un potencial cuártico, $V(x) = \beta x^4/4$. Se trata de encontrar una expresión aproximada para el período T como función de la energía E.



Lo primero que hay que notar es que, cualitativamente hablando, el potencial cuártico tiene la misma forma que el potencial armónico, al que ya estamos acostumbrados, por lo tanto el movimiento será periódico. Si a $t = 0$ la partícula parte de $x = 0$ y regresa a $x = 0$ a tiempo $t = T$, la trayectoria será aquella que extreme la acción,

$$I[x] = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - \frac{\beta}{4}x(t)^4\right], \tag{1}$$

sujeta a esas condiciones. Mediante la ecuación de Euler-Lagrange el problema podría traducirse a buscar la solución de una ecuación diferencial ordinaria. La idea del ejercicio es otra. Es tratar de encontrar por métodos directos la función que extrema la acción. Este enunciado debe ser tomado al pie de la letra: encontrar la trayectoria exacta requiere explorar todas las funciones dos veces derivables que en $t = 0$ y $t = T$ valen 0. Tal cosa no es imposible (como veremos en el próximo problema), lo que aquí torna impracticable este procedimiento es el hecho de que el potencial sea cuártico.

En lugar de buscar la solución en todo el espacio de funciones admisibles, acotaremos la búsqueda a una clase reducida de funciones, en la inteligencia de que el extremo de la acción restringida a funciones de esta clase dará la mejor aproximación accesible. Es como buscar a la persona más longeva del mundo indagando sólo entre los ciudadanos chinos.

De esta manera, el problema sugiere considerar la familia de funciones

$$x(t, A) = A \sin \omega t, \tag{2}$$

con $\omega = 2\pi/T$, y buscar los extremos no triviales de la acción dentro de esta familia. Esta clase de funciones tiene la característica principal que nos interesa, es decir, que la solución sea periódica y, además, que el paso por $x = 0$ a tiempo T corresponda a un período completo del movimiento, y no a un paso intermedio.

---

[*]linotipista: zanellaj@df.uba.ar

Calculemos entonces la acción para este tipo de funciones y veamos cuál es el parámetro A que la hace extrema. Sustituyendo la función de prueba (2) en la ec. (1), resulta

$$I(A) = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t - \frac{\beta A^4}{4} \sin^4 \omega t\right]. \tag{3}$$

La acción es así una función de A, más aún, es un polinomio, $I = c_1 A^2 + c_2 A^4$. Todo el mundo sabe que la integral de $\cos^2 \omega t$ en un período es $T/2$. Ahora bien, tener que calcular la integral del seno a la cuarta le da a uno ganas de llorar. No hay que apurarse a hacer escándalo: en primer lugar, la integral se puede calcular con la computadora; en segundo lugar, al poco de pensarlo se descubrirá que calcular la integral de $\sin^{2n} \omega t$ durante un período es bastante trivial. En verdad, usando el binomio de Newton,

$$\sin^{2n} \omega t = \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-1)^{2n-j} e^{2i(j-n)\omega t}. \tag{4}$$

La integral en un período de un término tal como $e^{2i(j-n)\omega t}$ dará cero a menos que $j = n$, lo que sucede para un único término de la sumatoria. Luego,

$$\int_0^T dt\ \sin^{2n} \omega t = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} T. \tag{5}$$

En particular, para $n = 2$,

$$\int_0^T dt\ \sin^4 \omega t = \frac{3}{8} T. \tag{6}$$

Finalmente,

$$I(A) = \left(m\omega^2 A^2 - \frac{3\beta A^4}{8}\right) \frac{T}{4}. \tag{7}$$

Igualando a cero la derivada de I respecto de A queda

$$2m\omega^2 A - \frac{3\beta A^3}{2} = 0. \tag{8}$$

Además de la solución trivial $A = 0$, encontramos otras dos:

$$A = \pm\sqrt{\frac{4\omega^2 m}{3\beta}} = \pm\frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{m}{3\beta}}. \tag{9}$$

Los dos signos son válidos: partiendo desde $x = 0$ en $t = 0$ la partícula puede regresar a $x = 0$ a tiempo T ya sea que inicialmente tenga cierta velocidad o la opuesta. Para fijar ideas, quedémonos con el signo más. Es notable que el período sea inversamente proporcional a la amplitud. Como el problema no tiene ninguna longitud característica, el análisis dimensional indica que este resultado es exacto. Lo que no es exacto es la constante de proporcionalidad entre A y $1/T\sqrt{m/\beta}$ (pueden hacer la comparación como ejercicio).

En conclusión, la función que extrema la acción dentro de la clase de funciones (2) es

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{4\omega^2 m}{3\beta}} \sin \omega t. \tag{10}$$

El problema, además, pide examinar la relación entre el período T y la energía E. Para un oscilador armónico sabemos que el período es independiente de la amplitud y, por lo tanto, de la energía. ¿Qué es lo que sucederá en el caso del potencial cuártico? La respuesta cualitativa puede obtenerse por análisis dimensional. Hay que tratar de formar una cantidad con dimensiones de tiempo usando sólo la energía E, la masa m y la constante β. Si A es la amplitud del movimiento, tenemos dos magnitudes con dimensiones de energía,

$$\left[mA^2T^{-2}\right] = [E]\,, \qquad \left[\beta A^4\right] = [E]\,. \tag{11}$$

Los corchetes indican aquí las dimensiones de las cantidades que encierran. La primera expresión, por ejemplo, debe leerse así: las dimensiones de m por A al cuadrado sobre T al cuadrado son iguales a las dimensiones de E. Elevando al cuadrado la primera relación y dividiéndola por la segunda se elimina la amplitud, y queda

$$\left[m^2T^{-4}\beta^{-1}\right] = [E]. \tag{12}$$

De aquí se ve que la combinación de parámetros que tiene dimensiones de tiempo y que es entonces proporcional al período es

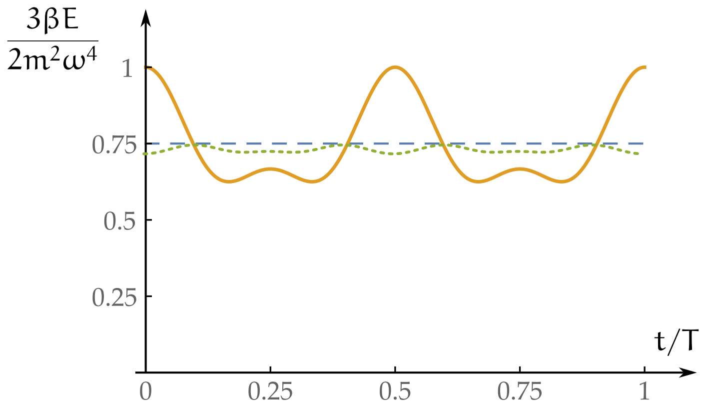
$$\tau = \left(\frac{m^2}{\beta E}\right)^{1/4} \propto T. \tag{13}$$

Se obtiene pues que, a mayor energía, menor es el período. El tiempo que se pierde debido al aumento de la amplitud se recupera debido al aumento de la velocidad.

Esta es la respuesta cualitativa. Para obtener una relación cuantitativa entre T y E hay que hacer el cálculo explícito. Si conociéramos la solución exacta, $x(t)$, bastaría usarla para evaluar la energía en $t = T/4$, ya que, por simetría, ahí la velocidad es cero y entonces

$$E = \frac{\beta}{4}\,x\left(\tfrac{1}{4}T\right)^4\,. \tag{14}$$

La dificultad es que no conocemos la solución exacta, y la solución aproximada que obtuvimos no tiene una energía constante, como muestra la siguiente figura.



La línea llena es la energía adimensionalizada de la aproximación (10); la línea de trazos es su valor medio; la línea de puntos corresponde a una aproximación de segundo orden, discutida al final del problema. Para las soluciones aproximadas no podemos dar una relación entre la energía y el período, pero sí entre la energía media y el período. Cuanto más cercana sea la solución aproximada a la solución exacta menor será la diferencia que haya entre hablar de una cosa o de la otra.

La energía media para la solución aproximada (10) se calcula mediante las mismas integrales usadas para calcular la acción. Resulta

$$\bar{E} = \frac{m^2\omega^4}{2\beta}. \tag{15}$$

La relación entre la energía media y el período que se obtiene de aquí es

$$T = \frac{2\pi}{2^{1/4}}\left(\frac{m^2}{\beta\bar{E}}\right)^{1/4} \approx 5{,}2835 \times \left(\frac{m^2}{\beta\bar{E}}\right)^{1/4}. \tag{16}$$

A modo de comparación, la relación exacta entre el período y la energía involucra como constante de proporcionalidad al doble de la constante de la lemniscata:

$$2 \times \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \approx 5{,}2441. \tag{17}$$

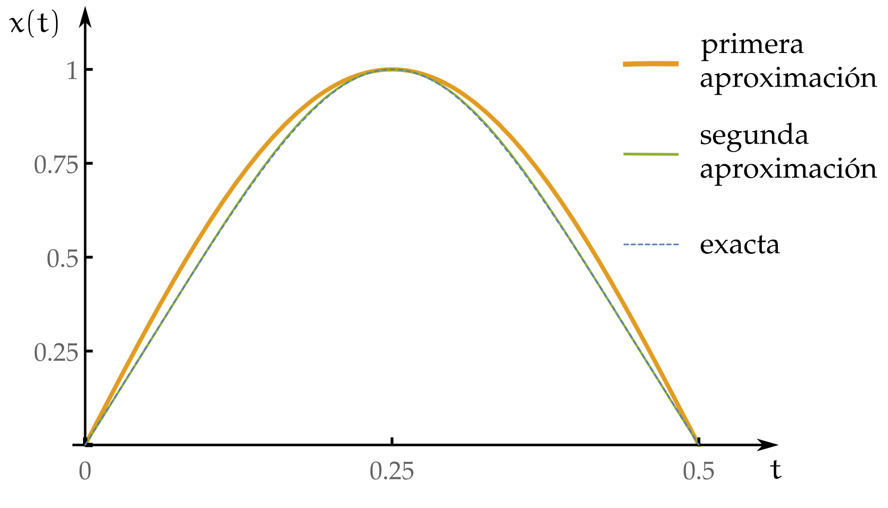
El problema no lo pide, pero uno podría mejorar la solución sumando más términos,

$$x_3(t) = a_1 \sin\omega t + a_3 \sin 3\omega t, \tag{18}$$

($a_2 = 0$ por simetría) y habría que extremar la acción respecto de los parámetros a_1 y a_3. Los detalles del cálculo son engorrosos; baste decir que resulta

$$T \approx 5{,}2443 \times \left(\frac{m^2}{\beta\bar{E}}\right)^{1/4}. \tag{19}$$

El acuerdo es mucho mejor. Notar que en la figura de la página anterior incluimos la energía como función del tiempo para esta aproximación. Es notable cómo ha disminuido su variación respecto de la primera aproximación. Finalmente, mostramos la trayectoria para la solución exacta y las dos aproximaciones (durante medio período, todo adimensionalizado). La segunda aproximación es difícilmente distinguible de la solución exacta.



■ **Problema 7**. En este problema se trata de hallar la trayectoria de una partícula que se mueve sobre el eje y bajo la acción de la gravedad. Por simplicidad se asume que el movimiento ocurre entre $t = 0$ y $t = t_c > 0$. El problema variacional es el de encontrar la trayectoria que extrema la acción

$$I[y] = \int_0^{t_c} dt\, \mathcal{L}\big(y(t), \dot{y}(t)\big), \tag{20}$$

sujeta a las condiciones $y(0) = y(t_c) = 0$. Es decir, la partícula parte desde el origen y regresa al origen un tiempo después. En otras palabras: es una partícula que se lanza hacia arriba.

Sabemos que la solución del problema variacional puede darse a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso todo eso es trivial. Por un lado

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy, \tag{21}$$

lo que implica

$$\ddot{y} = -g, \tag{22}$$

que se integra inmediatamente:

$$y(t) = a + bt - \frac{g}{2} t^2. \tag{23}$$

Si la partícula parte del origen a tiempo $t = 0$ y regresa a tiempo $t = t_c$, encontramos

$$a = 0, \qquad b = \frac{gt_c}{2}. \tag{24}$$

Además es obvio que $b = \dot{y}(0)$.

La idea del problema es no recurrir a las ecuaciones de Euler-Lagrange, sino buscar de modo directo la función que extrema la acción bajo las condiciones de contorno dadas. Queremos resolver la ecuación

$$\delta I[y] = 0, \tag{25}$$

con $y(0) = y(t_c) = 0$.

El método que se propone en el enunciado se conoce como método de Ritz. Consiste en considerar el problema variacional no en todas las funciones admisibles, sino únicamente dentro de una clase de funciones que son combinaciones lineales de ciertas W_j,

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j W_j(t). \tag{26}$$

Si el conjunto de funciones W_j es una base completa de las funciones admisibles, entonces es esperable que al hacer tender n a infinito la solución $y_n(t)$ converja a la solución exacta. Para n finito, tendremos una solución aproximada.

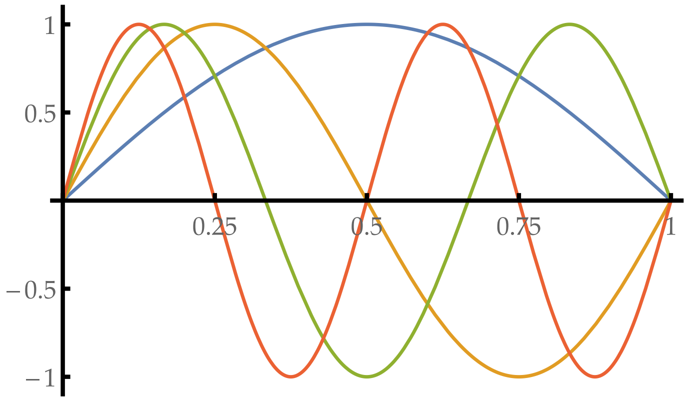
Lo más sencillo es elegir una familia de funciones que satisfaga las condiciones de contorno del problema original. En este caso buscaríamos funciones tales que

$$W_j(0) = W_j(t_c) = 0. \tag{27}$$

Dentro de esta clase de funciones, una familia muy utilizada es la de las funciones seno

$$W_j(t) = \sin\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right). \tag{28}$$

La figura muestra las primeras funciones de esta familia en el intervalo $[0, 1]$.



Se sabe que este conjunto es base; además estas funciones W_j son ortogonales:

$$\int_0^{t_c} dt\, W_i(t) W_j(t) = \delta_{ij}\frac{t_c}{2}. \tag{29}$$

La búsqueda de una solución aproximada empezaría por tomar $n = 1$ en la ec. (26), es decir

$$y(t) \simeq y_1(t) = a_1 \sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right). \tag{30}$$

Debemos minimizar la acción respecto al único parámetro libre que tenemos, que es a_1. En este caso la acción es una función de a_1, dada por

$$\begin{aligned}\frac{I(a_1)}{m} &= \int_0^{t_c} dt\, \left[\frac{1}{2}\dot{y}_1(t)^2 - g y_1(t)\right] = \int_0^{t_c} dt\, \left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2 a_1^2}{t_c^2}\cos^2\left(\frac{\pi t}{t_c}\right) - g a_1 \sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right)\right] \\ &= \frac{\pi^2 a_1^2}{4 t_c} - \frac{2 g a_1 t_c}{\pi}.\end{aligned} \tag{31}$$

Buscando el extremo respecto de a_1, se obtiene que éste se encuentra en

$$a_1^* = \frac{4 g t_c^2}{\pi^3}, \tag{32}$$

con lo que queda

$$y_1(t) = \frac{4 g t_c^2}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right). \tag{33}$$

Una de las cosas que podemos comparar respecto de la solución exacta es el valor de la velocidad inicial. Aquí es

$$\dot{y}_1(0) = \frac{4gt_c}{\pi^2} \approx 0{,}405\, gt_c, \tag{34}$$

en contraste con el valor exacto, que es $\dot{y}(0) = \frac{1}{2}gt_c$. Por otro lado, la altura máxima es un 3 % mayor que la exacta (verifíquenlo).

La ventaja de trabajar con la base de funciones seno es que, debido a la linealidad del potencial, podemos extender todos estos cálculos para n cualquiera. Primero escribimos, como en la ec. (26),

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right). \tag{35}$$

El término de la acción que es cuadrático en la velocidad se calcula como

$$\int_0^{t_c} dt\; \dot{y}_n(t)^2 = \int_0^{t_c} dt\; \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{j\pi a_j}{t_c} \cos\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right)\right]^2. \tag{36}$$

Usando la ortogonalidad de las funciones $\cos(j\pi t/tc)$,

$$\int_0^{t_c} dt\; \cos\left(\frac{j\pi}{t_c}t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{t_c}t\right) = \delta_{jk}\frac{t_c}{2}, \tag{37}$$

al desarrollar el cuadrado de la serie en la ec. (36), sólo sobreviven los términos diagonales. Este es, quizás, el punto más técnico del ejercicio:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_c} dt\; \dot{y}_n(t)^2 &= \int_0^{t_c} dt\; \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{j\pi a_j}{t_c} \cos\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right)\right] \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi a_k}{t_c} \cos\left(\frac{k\pi t}{t_c}\right)\right] \\
&= \int_0^{t_c} dt\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{t_c^2} jk\, a_j a_k \cos\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right) \cos\left(\frac{k\pi t}{t_c}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{t_c^2} jk\, a_j a_k \int_0^{t_c} dt\; \cos\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right) \cos\left(\frac{k\pi t}{t_c}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j\pi a_j}{t_c}\right)^2 \frac{t_c}{2}.
\end{aligned} \tag{38}$$

El término de la acción asociado a la energía potencial es más sencillo de calcular,

$$\int_0^{t_c} dt\; y_n(t) = \int_0^{t_c} dt\; \sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j t_c}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right]. \tag{39}$$

Reuniendo los dos resultados, la acción es

$$\frac{I(\mathbf{a})}{m} = \int_0^{t_c} dt\; \left[\frac{1}{2}\dot{y}_n(t)^2 - g y_n(t)\right] = \sum_{j=1}^{n} \left\{\left(\frac{j\pi a_j}{t_c}\right)^2 \frac{t_c}{4} - \frac{g t_c a_j}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right]\right\}. \tag{40}$$

Debemos buscar el conjunto de coeficientes $\mathbf{a}$ que extreman la acción. Derivando con respecto a cada a_j e igualando a cero, resulta

$$\frac{1}{m}\frac{dI(\mathbf{a})}{da_j} = \left(\frac{j\pi}{t_c}\right)^2 a_j \frac{t_c}{2} - \frac{gt_c}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right] = 0, \tag{41}$$

lo que implica que los coeficientes impares están dados por

$$a_{2k+1} = \frac{4gt_c^2}{\left[(2k+1)\pi\right]^3}, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{42}$$

y los coeficientes pares son cero, $a_{2k} = 0$. Debido a que

$$\sin\left[\frac{j\pi(t_c - t)}{t_c}\right] = (-1)^{j+1}\sin\left[\frac{j\pi t}{t_c}\right], \tag{43}$$

esto indica que la trayectoria es una función par respecto de $t_c/2$, lo que no es difícil de entender en base a la simetría de inversión temporal.

En conclusión,

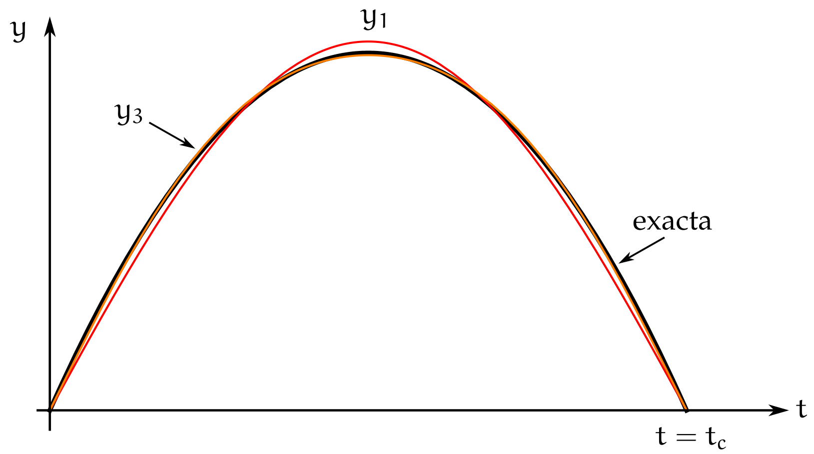
$$y_n(t) = \frac{4gt_c^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi t}{t_c}\right]. \tag{44}$$

Así, por ejemplo, el segundo nivel en la aproximación sería

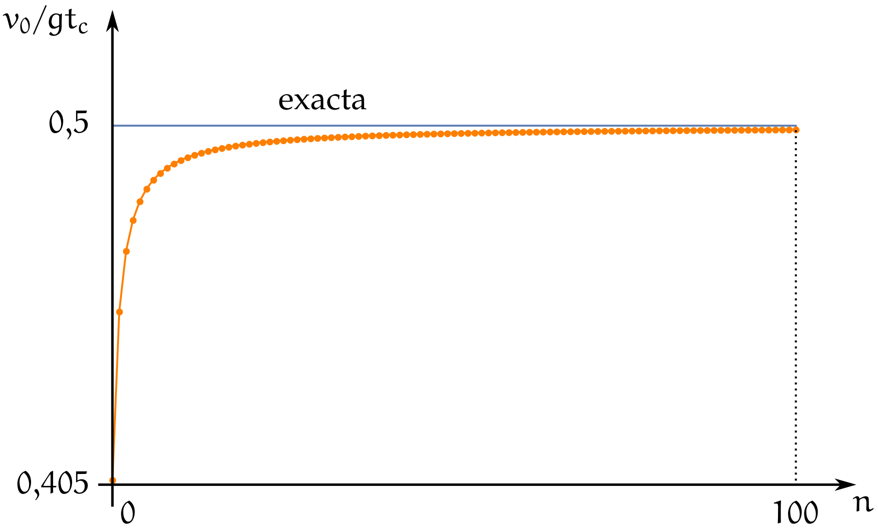
$$y_3(t) = \frac{4gt_c^2}{\pi^3}\left[\sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right) + \frac{1}{27}\sin\left(\frac{3\pi t}{t_c}\right)\right]. \tag{45}$$

Queda como ejercicio demostrar que el cálculo directo de la expansión en serie de Fourier de senos de la solución exacta coincide con la expansión obtenida para y_n si se hace tender n a infinito.

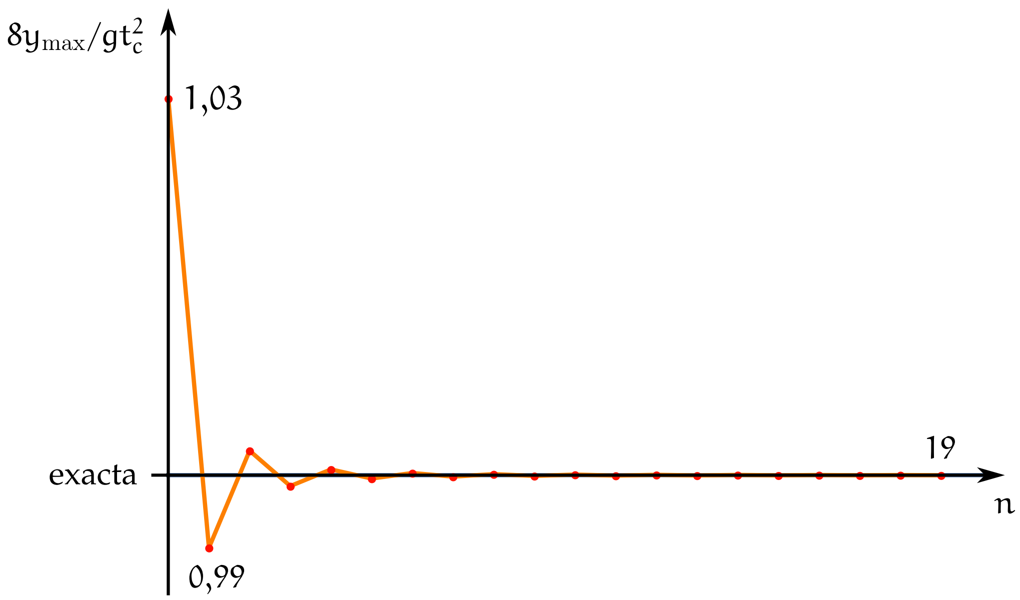
Siguen varios gráficos comparativos entre la solución exacta y las aproximadas: la primera figura muestra una comparación entra la solución exacta $y(t)$ y las aproximaciones $y_1(t)$ e $y_3(t)$. Esta última es muy difícil de distinguir de la primera. Estupefacción grado 8.



La siguiente figura muestra la velocidad inicial calculada para $y_{2n+1}(t)$, con n entre 0 y 100 (recordar que los coeficientes pares a_{2k} son nulos y, por lo tanto, $y_{2n} = y_{2n-1}$). Aquí se ve que la convergencia es mucho más lenta que lo que podía sugerir el gráfico anterior.



Por el contrario, la altura máxima calculada a partir de las funciones $y_{2n+1}(t)$ converge rápidamente al valor exacto, como lo muestra el gráfico siguiente, donde n varía entre 0 y 19, lo que es equivalente a decir que el último punto corresponde a y_{39}.



■ Un último comentario acerca de los dos problemas aquí presentados. Al extremar la acción respecto de los coeficientes a_j en el problema del potencial gravitatorio, resultó una ecuación separada para cada coeficiente, ec. (41), sin que unos y otros coeficientes se acoplaran. Esto es lo que hace posible que, al escribir

$$y_\infty(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\left(\frac{j\pi t}{t_c}\right), \tag{46}$$

podamos truncar la serie, sin mayor problema, para cualquier $j_{\max}$. Los términos descartados no influyen en el cálculo de los términos retenidos. La función y_{2n+1} es igual a la función y_{2n-1} más un término extra.

Si vuelven al Problema 5 (partícula en un potencial cuártico) e intentan plantear la solución en forma de serie infinita, se encontrarán con que esto es muy difícil. Sin ir tan lejos, si intentasen, por ejemplo, buscar la solución aproximada de la forma

$$x(t) = a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3\omega t, \tag{47}$$

(la simetría del problema elimina los términos pares) verán que el valor de a_1 no resulta independiente del valor de a_3. Dicho en otras palabras: la aproximación de orden 3 no se construye sumándole a la aproximación de orden 1 un término extra. Cuando plantean el problema de extremar la acción respecto de a_1 y a_3, la solución para a_1 no es la misma que obtienen cuando sólo trabajan con la aproximación de primer orden. En cambio, en el problema de la partícula en el potencial gravitatorio, las aproximaciones se construyen agregando un término por vez a las aproximaciones de menor nivel, sin modificarlas en lo más mínimo. La no linealidad del problema del potencial cuártico hace necesario modificar todo el edificio de la aproximación cada vez que se agrega un nuevo nivel.

Otra cosa: el ejemplo del Problema 7 de una partícula en un campo gravitatorio constante es tan sencillo que resolverlo mediante métodos variacionales directos sólo sirve a los efectos de presentar estos métodos. En cambio, el problema de la partícula en el potencial cuártico no es de ninguna manera sencillo. Resolverlo analíticamente es equivalente a encontrar soluciones de la ecuación

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\beta}{m} x^3(t), \tag{48}$$

o, si se usa conservación de la energía, a calcular la integral

$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{4}\beta x^4}}, \tag{49}$$

y ni hablar de invertir esta relación para escribir $x(t)$. Aquí se ve entonces la importancia del método variacional directo, que permite encontrar la solución aproximada para $x(t)$ por un camino que, en apariencia, está completamente apartado del cálculo de integrales o de la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo grado.