Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Suplemento de la clase práctica del jueves 5/9. *Guía 3. Simetrías.*[*]

1. ¿Por qué el potencial de una hélice tiene la forma de la hélice?

Cuando se buscan las cantidades conservadas para el movimiento de una partícula de masa m en el potencial gravitatorio que produce una distribución de masa con simetría helicoidal, se usa el hecho de que el propio potencial tiene la simetría de una hélice.

La transferencia de una simetría de la distribución ρ a una simetría del potencial V es típica de los potenciales de la forma

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\; G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\; \rho(\mathbf{r}'), \tag{1}$$

donde ρ es la densidad (de carga, de masa, de lo que fuera) y donde G es una función escalar. En los problemas de gravitación o de electrostática, esa función es sencillamente $1/r$. La ecuación anterior se lee diciendo que el potencial en el punto $\mathbf{r}$ es la suma de las contribuciones individuales de cada elemento de volumen $d^3\mathbf{r}'$, donde esas contribuciones son proporcionales a la densidad (de carga, de masa, de lo que fuera) y a una función G del módulo de la posición relativa entre el punto en donde se calcula el potencial, $\mathbf{r}$, y el punto que lo genera, $\mathbf{r}'$.

Para un distribución de masa o de carga eléctrica sería

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\; \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2}$$

[*] yo soy zanellaj@df.uba.ar

Existen potenciales más generales. En electrostática, en lugar de una densidad de carga, podría tenerse, por ejemplo, una densidad de momento dipolar, $\mathbf{p}(\mathbf{r})$. En tal caso el potencial es

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{3}$$

que ya no tiene la forma (1). Distribuciones de carga cuadrupolares involucrarán una densidad ya no escalar ni vectorial, sino tensorial. Esto es para mostrarles que la forma (1) es sólo un caso particular entre los potenciales escalares.

En el problema 10 de la Guía 3 se dan varias distribuciones de masa y se pide encontrar cantidades conservadas. Eso se hace en base a la simetría del lagrangiano, simetría que depende de cada distribución a través de su potencial. Pero lo que está a la vista en el enunciado del problema no son ni las simetrías del lagrangiano ni las del potencial, sino las simetrías de las distribuciones de masa. La esfera tiene simetría esférica; el cilindro, cilíndrica; el plano, traslacional. ¿Será entonces que la esfera genera un campo con simetría esférica, el cilindro genera uno con simetría cilíndrica y el plano uno con simetría traslacional? Eso no está dicho en el enunciado. Estas notas contestan preguntas como esas y como la que sirve de título a esta sección. El objetivo es llenar el vacío argumental que va de las propiedades de transformación y de simetría de los sistemas físicos a las propiedades de transformación y de simetría de sus campos. No vamos a resolver problemas ni a decir nada demasiado fundamental para resolver problemas, aunque mostraremos algunas técnicas que es conveniente manejar y que dan una clara ventaja en esta y otras materias.

Lo que haremos primero es definir qué es un campo escalar, con la densidad de masa como nuestro campo modelo. Luego escribiremos explícitamente las propiedades de transformación de los campos escalares, en especial, bajo traslaciones y rotaciones. A continuación estudiaremos cómo transforman los potenciales definidos por ecuaciones de la forma (1). El resultado principal es que V también será un campo escalar. Después definiremos lo que es una simetría a nivel de ρ. Por último, vamos a mostrar la manera en que las simetrías de ρ son heredadas por el potencial. Al final de todo resolveremos el problema de la distribución de masa con simetría helicoidal.

2. Campos escalares

Consideremos el caso más simple, cuando el potencial es de la forma (1) y donde ρ es un campo escalar.

¿Qué significa que ρ sea un campo escalar? Pensemos en la densidad de masa. Obviamente ρ es una magnitud escalar; es un número. Es también obvio que $\rho(\mathbf{r})$ es una función escalar; a cada $\mathbf{r}$ le asigna un número. ¿Quiere decir esto que usamos la palabra campo como sinónimo exquisito de la palabra función, que decimos *campo de densidad* cuando podríamos decir, con mayor simpleza, *función densidad*? La respuesta es no. No cualquier función escalar es un campo escalar. Cuando una función es también un campo escalar conviene llamarla de este modo.

Una definición precisa de lo que es un campo está más allá de lo que nos proponemos. Informalmente hablando, un campo es una función de la posición y del tiempo que está asociada a un sistema físico y que tiene propiedades precisas de transformación. Por ejemplo, una distribución de masa tiene asociados un campo de densidad, de velocidades, de esfuerzos, de energía, etc. Puede pensarse que los campos son algo adherido al sistema físico. Éste no necesariamente tiene que ser algo material. Una región definida del espacio puede tener asociados campos; las condiciones de contorno en este caso forman parte de la definición del sistema físico.

Que un campo sea escalar significa que a cada punto le hace corresponder un número y que, en una transformación rígida del sistema físico, el campo se comporta como se comportaría una función ordinaria ante ese tipo de transformación. Para decirlo más pictóricamente: al transformar el sistema físico, el campo se transforma como si fuera algo rígidamente ligado al sistema. Una traslación del sistema físico da como resultado un nuevo campo cuyo dibujo es el dibujo trasladado del campo original. Una rotación del sistema físico hace rotar el dibujo del campo. El sistema reflejado lleva asociado un campo cuyo dibujo es el dibujo reflejado del sistema original.

Pudiera parecer que, con este criterio, cualquier función escalar $f(\mathbf{r})$ tiene el derecho de ser llamada un campo escalar, después de todo trasladar o rotar una función parecen nociones matemáticas independientes de cualquier referencia física. Pero es evidente que cualquier función escalar no es un campo escalar: la componente x de la velocidad de un fluido es una función escalar, pero no es un campo escalar: si rotamos en 90° alrededor del eje z un fluido que se mueve uniformemente en la dirección x, la función que da la componente x de la velocidad después de la rotación es cero en todo el espacio. El supuesto campo escalar se ha anulado ante la mera rotación del sistema. Así no es como transforma un campo escalar.

¿Dónde está la sutileza? ¿Con qué criterio se decide si una función $f(\mathbf{r})$ es un campo escalar? La sutileza está en que cuando decimos que hacemos tal o cual transformación no estamos hablando de transformaciones que operan al nivel de las funciones sino al nivel de los sistemas físicos. Existe un segundo paso que consiste en traducir la operación física sobre un sistema concreto a una operación matemática sobre ciertas funciones. El punto crucial es la asociación entre el sistema físico y la función matemática.

Hay aquí un paso conceptual importante. La conexión entre la transformación de un sistema físico y la transformación de sus funciones asociadas es algo que debe ser provisto por la teoría física, ya sea como parte de sus definiciones o como consecuencia de las ecuaciones que modelan el sistema. Sabemos cómo transforman los campos electromagnéticos frente a una rotación porque tenemos las ecuaciones de Maxwell, que los definen en términos de sus fuentes y de las condiciones de contorno. Sabemos cómo transforman sus fuentes porque definimos sus propiedades de transformación de manera explícita: la densidad de carga es por definición un campo escalar; la densidad de corriente es por definición un campo vectorial. Ecuaciones y definiciones son las que permiten decir si una función tiene o no el estatus de campo, y, en tal caso, de qué clase: escalar, vectorial, tensorial, etc.

En Mecánica definimos la densidad como un campo escalar. Mover un objeto desde *aquí* hasta *allá* corresponde a trasladar la función densidad desde *aquí* hasta *allá*. Rotar el objeto es rotar su función densidad. Esta parece la única conexión natural entre el objeto y su densidad. Muy rápidamente nos abstraemos del objeto y lo reemplazamos por su densidad, y manipulamos la densidad como si habláramos del objeto.

3. Las transformaciones de los campos escalares

Hemos dicho que un campo escalar es una función del espacio y del tiempo que, frente a una traslación o rotación del sistema físico, se transforma trasladándose o rotando en la misma medida. Ahora veremos más precisamente cómo se escriben estas transformaciones; es decir, cuáles son las operaciones matemáticas que hay que aplicar al campo para trasladarlo o rotarlo. (Dejaremos de lado las reflexiones, que no tienen aquí tanta importancia como en Electromagnetismo).

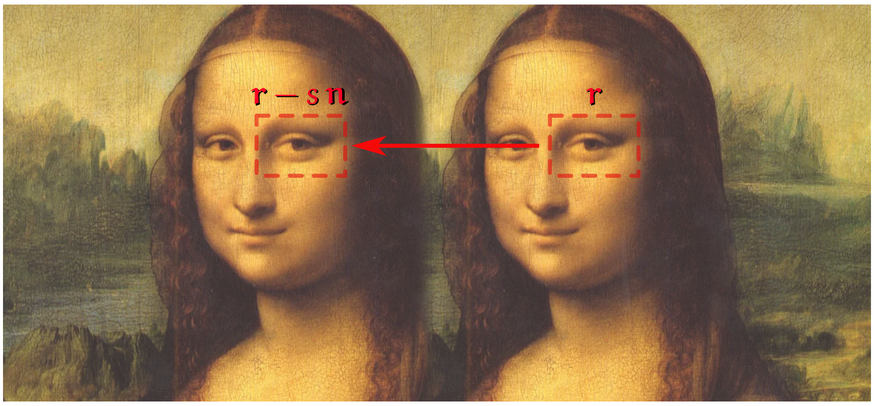
3.1. Traslaciones

Veamos primero la transformación de traslación, asociada a mover cosas de aquí para allá en línea recta. Trasladar un campo escalar $F(\mathbf{r})$ una distancia s en la dirección del versor $\mathbf{n}$ significa reemplazarlo por el campo $\bar{F}$ dado por

$$\bar{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}). \tag{4}$$

Noten que el signo corre a la inversa de la traslación. Recuerden que si quieren trasladar el gráfico de una función $f(x)$ hacia la derecha una distancia $s > 0$, tienen que reemplazar x por $x - s$. Trasladar una densidad de masa en la dirección positiva del eje x requeriría tomar $\mathbf{n} = \hat{x}$ y $s > 0$.

La ec. (4) se puede leer así: el campo trasladado *aquí* vale lo mismo que lo que el campo original valía *allá*; o, para saber cuánto vale el campo trasladado *aquí*, hay que mirar cuánto valía el campo original *allá*. Si corremos una pintura un metro hacia la **derecha**, el pigmento que hay en cierto punto de la pintura trasladada es igual al pigmento que había en la pintura original pero un metro hacia la **izquierda**.



Podríamos definir la transformación de traslación que opera sobre los vectores como

$$T_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, s) = \mathbf{r} + s\,\mathbf{n}. \tag{5}$$

Entonces, de manera equivalente, escribiríamos la ec. (4) según

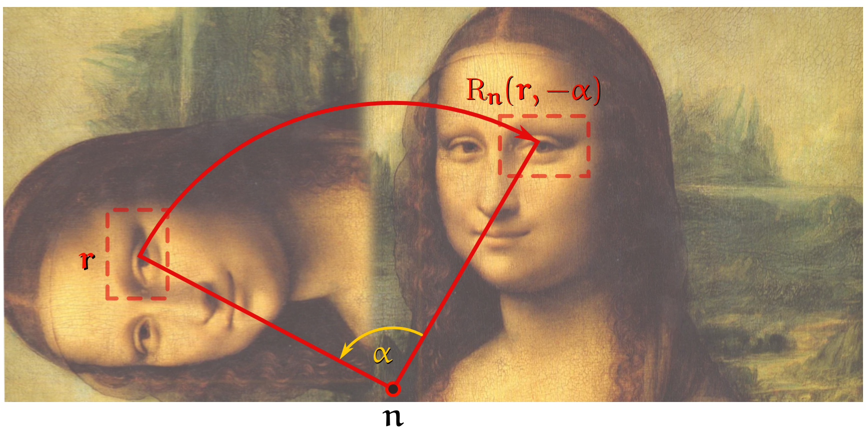
$$\bar{F}(\mathbf{r}) = F\big[T_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -s)\big]. \tag{6}$$

3.2. Rotaciones

Asimismo, rotar el campo un ángulo α alrededor de $\mathbf{n}$ significa rotar la función $F(\mathbf{r})$,

$$\bar{F}(\mathbf{r}) = F\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big]. \tag{7}$$

Aquí definimos $R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \alpha)$ como la función que rota el vector $\mathbf{r}$ un ángulo α alrededor de la dirección $\mathbf{n}$; el sentido de rotación está dado por la regla de la mano derecha. Otra vez, noten que rotar el campo en un sentido requiere evaluar el campo original en el punto que se obtiene rotando $\mathbf{r}$ en el sentido contrario. El campo rotado *aquí* es igual al campo original *allá*. Si rotamos una pintura en un ángulo de 90º, el pigmento que hay en un punto de la pintura rotada es igual al pigmento que había en la pintura original pero en un punto que está rotado en -90º respecto del punto que estamos observando.



■ Un comentario al margen, pero que tiene relevancia práctica y puede servir de herramienta en varios problemas: no es necesario, y a menudo es inconveniente, pensar a la función $R_{\mathbf{n}}$ como una matriz que actúa sobre las componentes cartesianas de $\mathbf{r}$. Como veremos a continuación, $R_{\mathbf{n}}$ puede definirse con independencia de las coordenadas que se utilicen para escribir $\mathbf{r}$.

La rotación no cambia la componente de $\mathbf{r}$ que es paralela al eje $\mathbf{n}$. Por lo tanto, escribiendo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \tag{8}$$

donde

$$\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}, \tag{9}$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n} = \mathbf{n}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{n}), \tag{10}$$

y usando la linealidad de la transformación, queda

$$R_n(\mathbf{r},\alpha) = R_n\big(\mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp,\alpha\big) = \mathbf{r}_\parallel + R_n(\mathbf{r}_\perp,\alpha)\,. \tag{11}$$

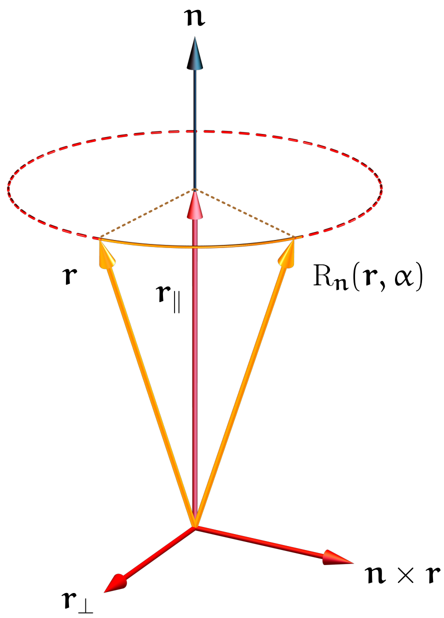
Así que lo único que hay que saber rotar son los vectores perpendiculares a $\mathbf{n}$. Podemos pensar que el vector $\mathbf{n}$ y el vector $\mathbf{r}_\perp$ definen los ejes z y x de cierto sistema de referencia, con el eje y en la dirección de $\mathbf{n}\times\mathbf{r}_\perp$. Sabemos cómo rotar vectores alrededor del eje z. En este caso en particular se trata de rotar un vector que está sobre el eje x. No les tendría que resultar difícil demostrar que

$$R_n(\mathbf{r}_\perp,\alpha) = \cos\alpha\,\mathbf{r}_\perp + \sin\alpha\;(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_\perp) = \mathbf{n}\times\big[\cos\alpha\;(\mathbf{r}\times\mathbf{n}) + \sin\alpha\;\mathbf{r}\big]. \tag{12}$$

Finalmente,

$$R_n(\mathbf{r},\alpha) = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\big[\cos\alpha\;(\mathbf{r}\times\mathbf{n}) + \sin\alpha\;\mathbf{r}\big]. \tag{13}$$

Esto era lo que queríamos mostrar: que la rotación no necesita apoyarse en el uso de coordenadas; perfectamente puede escribirse como una función de $\mathbf{r}$ entendido como un vector, y no como una terna de números.



4. Las transformaciones de los potenciales

Ya vimos cómo transforman los campos escalares frente a traslaciones y rotaciones. Nuestro campo escalar por excelencia es la densidad ρ. Lo que podemos preguntarnos ahora es en qué forma afectan al potencial las transformaciones de la densidad ρ. Si transformamos nuestra distribución de masa, de carga o de lo que fuera, ¿qué pasa con el potencial? Esta pregunta está dirigida a averiguar si el potencial V es o no un campo escalar. Si ante traslaciones y rotaciones, V transforma del mismo modo en que lo hace ρ entonces V es un campo escalar.

4.1. Traslaciones

Vayamos por partes. ¿Qué sucede con el potencial V frente a una traslación? Según la notación que introdujimos en la ec. (4), en una traslación la densidad transforma como

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}). \tag{14}$$

Por su propia definición (1), el potencial de la distribución trasladada es

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\; G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\; \bar{\rho}(\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{r}'\; G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\; \rho(\mathbf{r}' - s\,\mathbf{n}). \tag{15}$$

Mediante el cambio de variables $\mathbf{r}' - s\,\mathbf{n} \to \mathbf{r}'$, resulta

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\; G\big(|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - s\,\mathbf{n}|\big)\; \rho(\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{r}'\; G\big(|(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}) - \mathbf{r}'|\big)\; \rho(\mathbf{r}') = V(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}). \tag{16}$$

El penúltimo paso en esta serie de igualdades es trivial, pero ahí está todo lo que hay que ver. La conclusión es que, frente a una traslación, la función V transforma de la misma manera que el campo ρ.

Ya sólo falta demostrar que lo mismo ocurre para las rotaciones.

4.2. Rotaciones

Examinemos ahora las rotaciones. Según la notación que introdujimos en la ec. (7), frente a una rotación la densidad transforma como

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}) = \rho\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big]. \tag{17}$$

Igual que antes, por su propia definición (1), el potencial de la distribución rotada es

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\; G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\; \bar{\rho}(\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{r}'\; G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\; \rho\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}', -\alpha)\big]. \tag{18}$$

Hagamos el cambio de variables $R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}', -\alpha) \to \mathbf{r}'$. Notar que la transformación de rotación tiene jacobiano igual a 1, de modo que el cambio de variable no afecta al elemento de volumen. Con este cambio, la densidad vuelve a quedar evaluada en $\mathbf{r}'$, pero dentro del argumento de la función G hay que hacer el reemplazo

$$\mathbf{r}' \to R_{\mathbf{n}}^{-1}(\mathbf{r}', -\alpha) = R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}', \alpha). \tag{19}$$

Aquí hemos usado que la función inversa de una rotación de ángulo α alrededor de $\mathbf{n}$ es la rotación de ángulo $-\alpha$. De esta manera resulta

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\; G\Big(\,|\mathbf{r} - R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}', \alpha)|\,\Big)\; \rho(\mathbf{r}'). \tag{20}$$

Como las rotaciones son transformaciones lineales y tienen la propiedad de grupo

$$R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \alpha_1 + \alpha_2) = R_{\mathbf{n}}\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \alpha_1)\,, \alpha_2\big], \tag{21}$$

con la identidad dada por $R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, 0)$ y la inversa por $R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)$, podemos escribir el argumento del a función G en la ec. (20) como

$$\mathbf{r} - R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}', \alpha) = R_{\mathbf{n}}\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha), \alpha\big] - R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}', \alpha) = R_{\mathbf{n}}\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \mathbf{r}', \alpha\big]. \tag{22}$$

Volviendo a la ec. (20), queda

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\ G\Big(\big|R_{\mathbf{n}}\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \mathbf{r}', \alpha\big]\big|\Big)\ \rho(\mathbf{r}'). \tag{23}$$

Pero una propiedad básica de las rotaciones es que no cambian el módulo del vector que rotan. Luego,

$$\big|R_{\mathbf{n}}\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \mathbf{r}', \alpha\big]\big| = |R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \mathbf{r}'|. \tag{24}$$

Entonces,

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\ G\Big(\big|R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \mathbf{r}'\big|\Big)\ \rho(\mathbf{r}') = V\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big]. \tag{25}$$

De esta manera vemos que, ante una rotación, la función V transforma del mismo modo que el campo ρ.

4.3. El potencial es un campo escalar

Finalmente hemos demostrado que, ante traslaciones y rotaciones, V transforma igual que el campo ρ, y eso es todo lo que necesitamos para afirmar que V es un campo escalar.

5. Simetrías

Hablaremos ahora de las simetrías de un campo, sin hacer mayor referencia al sistema físico asociado.

Las simetrías de un campo son las transformaciones que lo dejan invariante. Tan sencillo como eso. En Mecánica Clásica saber cuáles son estas simetrías es importante para deducir leyes de conservación. Estamos refiriéndonos en estas notas a simetrías de tipo geométrico, en las que sólo intervienen transformaciones espaciales. Hay una clase mucho más extensa de simetrías que involucra tanto a las posiciones como a los impulsos y al tiempo. No trataremos aquí de esas simetrías.

Respondida la cuestión sobre el carácter de V, pasamos a preguntarnos acerca de las simetrías de V. En particular, de qué modo se manifiestan en V las simetrías de la densidad ρ. Las traslaciones y rotaciones fueron importantes para decidir si V era o no un campo escalar. Pero, tratándose de las simetrías, no hay ninguna obligación de limitarse a esos dos tipos de transformaciones. El hecho de que aquí sólo analicemos esos casos no debe tomarse como una regla. Antes me cortaría la mano que insinuar que las únicas transformaciones que pueden definirse para ρ son traslaciones y rotaciones. Uno también puede, por ejemplo, reflejar, aplastar, estirar, cortar, revolver, invertir, proyectar, reescalear, torcer, multiplicar por una función, promediar, convolucionar, etc. Lo que tienen de especial las transformaciones rígidas es que es muy clara la equivalencia entre las operación física sobre el sistema y la operación matemática sobre los campos. En los otros casos hay que andar con más cuidado. Por ejemplo, una transformación posible sería multiplicar la densidad en cada punto por $e^{i\phi(\mathbf{r})}$, donde ϕ es una función real de $\mathbf{r}$. Es fácil escribir eso matemáticamente, $\bar{\rho}(\mathbf{r}) = e^{i\phi(\mathbf{r})}\rho(\mathbf{r})$, pero ¿a qué operación física corresponde?

Además restringiremos nuestro análisis a simetrías continuas: el parámetro que gobierne las transformaciones podrá tomar valores en todo un intervalo. Las transformaciones discretas (rotaciones en múltiplos de un ángulo fijo, traslaciones según múltiplos de una distancia dada, reflexiones, etc.) tienen su propia familia de simetrías, pero no son muy relevantes en Mecánica.

5.1. Simetría de traslación

Una de las simetrías más sencillas que puede tener la densidad ρ es la simetría de traslación. Esto significa que existe una dirección $\mathbf{n}$ tal que la densidad no cambia si se la desplaza en esa dirección. Según la notación que introdujimos en la ec. (4)

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}) = \rho(\mathbf{r}), \tag{26}$$

para cualquier s. Un cilindro infinito es un ejemplo de este tipo de distribución; siempre que la densidad sea uniforme a lo largo de su eje, la sección transversal del cilindro puede ser cualquiera. Un plano, un semiplano, un hilo, son todos ejemplos que poseen este tipo de simetría, en una o más direcciones. No es ocioso hacer notar nuevamente que la definición implica una transformación que se realiza de manera activa sobre la distribución. No es un cambio de sistema de referencia. Es la traslación física de la distribución.

Según demostramos más arriba, frente a estas traslaciones el potencial transforma como

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}). \tag{27}$$

Ahora bien, como el potencial depende sólo de la densidad y por hipótesis la densidad es invariante, el potencial transformado tiene que ser igual al potencial original. Luego,

$$V(\mathbf{r} - s\,\mathbf{n}) = V(\mathbf{r}). \tag{28}$$

Esto implica que el potencial tiene la misma simetría de traslación que la densidad.

Siempre se corre el riesgo de que lo anterior parezca una obviedad, cuando no lo es. Lo único obvio es que a iguales densidades corresponden iguales potenciales. Pero por sí sólo eso no dice nada nuevo acerca del potencial. El hecho de que sepamos cómo transformaría el potencial frente a una traslación es la parte importante. Es de la conjunción de esos dos enunciados que obtenemos algo nuevo, a saber, la propiedad expresada en la ec. (28).

5.2. Simetría de rotación

Análoga a la simetría de traslación está la simetría de rotación. Esta simetría corresponde a la existencia de cierto eje $\mathbf{n}$ tal que la densidad no cambia si se la rota cualquier ángulo

α alrededor de ese eje. Formalmente,

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}) = \rho\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big] = \rho(\mathbf{r}). \tag{29}$$

Hemos demostrado que ante una rotación el potencial transforma según la ec. (25),

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = V\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big]. \tag{30}$$

Si la densidad no cambia, el potencial no cambia. Entonces $\bar{V} = V$, y esto implica

$$V\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big] = V(\mathbf{r}). \tag{31}$$

En conclusión: una distribución de masa con simetría de rotación genera un potencial con la misma simetría. Ejemplos de estas distribuciones son: un cilindro circular recto, un plano, un cono circular recto, un toro de cualquier sección, dos masas puntuales, un anillo, una esfera, un elipsoide de revolución.

De nuevo, préstese atención al mecanismo de la demostración. No estamos diciendo simplemente que V es el mismo antes y después de la rotación. Estamos encontrando una propiedad que tiene que tener la función $V(\mathbf{r})$, según queda expresada en la ec. (31).

6. Consecuencias de las simetrías

Hasta aquí nos mantuvimos mayormente ajenos a cualquier sistema de coordenadas. Cuando de manera explícita se escribe el potencial como una función de las coordenadas, las propiedades de simetría se manifiestan de un modo más claro. Lo que digamos en esta sección tiene cierta relevancia para resolver los problemas.

6.1. Simetría de traslación en coordenadas cartesianas

Por ejemplo, decir en abstracto que un potencial (o cualquier otro campo escalar) tiene simetría de traslación según el eje z significa que

$$V(\mathbf{r} - s\,\hat{z}) = V(\mathbf{r}), \tag{32}$$

para cualquier s. Dicho en coordenadas cartesianas se lee como

$$V(x, y, z - s) = V(x, y, z). \tag{33}$$

Escrito así es más revelador: quiere decir que el potencial no depende de la coordenada z. Un potencial con simetría de traslación en la dirección z debe ser una función únicamente de x y de y

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y). \tag{34}$$

6.2. Simetría de rotación en coordenadas cilíndricas y esféricas

Dicho en abstracto, que un potencial posea simetría de rotación alrededor del eje z implica que

$$V\big[R_{\hat{z}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big] = V(\mathbf{r}), \tag{35}$$

para cualquier α. En coordenadas cilíndricas, la simetría queda más expuesta. El efecto de la transformación es restar α a la coordenada φ. Por lo tanto, la simetría significa que

$$V(\rho, \varphi - \alpha, z) = V(\rho, \varphi, z), \tag{36}$$

lo que implica que V no puede depender de φ. Tiene que ser

$$V(\mathbf{r}) = V(\rho, z). \tag{37}$$

Análogamente, en coordenadas esféricas, si el eje se simetría se toma según el eje z, resulta

$$V(\mathbf{r}) = V(r, \theta). \tag{38}$$

6.3. Simetría esférica en coordenadas esféricas

Un caso de especial importancia es el de la simetría de rotación alrededor de cualquier eje (es decir, de todos los ejes), llamada simetría esférica. En tal caso

$$V\big[R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha)\big] = V(\mathbf{r}), \tag{39}$$

para cualquier dirección $\mathbf{n}$ y cualquier ángulo α. Como es de esperar, esta simetría se expresa mejor en coordenadas esféricas. Dados dos puntos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ tales que $r = r'$, es posible encontrar una dirección $\mathbf{n}$ y un ángulo α de manera que $R_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) = \mathbf{r}'$ (queda como ejercicio encontrar explícitamente $\mathbf{n}$ y α en términos de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$, sin usar coordenadas de ningún tipo). Los vectores deben tener el mismo módulo, pero sus coordenadas angulares pueden ser arbitrarias. La simetría del potencial y el hecho de que podamos encontrar una rotación que transforma un vector en el otro implican

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r, \theta', \varphi'). \tag{40}$$

Por lo tanto, el potencial sólo puede ser función de r,

$$V(\mathbf{r}) = V(r). \tag{41}$$

No hay tantos ejemplos de distribuciones que generen potenciales con simetría esférica. La distribución tiene que ser, en esencia, una esfera con una densidad que sólo puede depender del radio.

6.4. Simetría helicoidal

Ahora tenemos más herramientas para contestar lo que nos preguntábamos al comienzo, esto es, si el potencial de una hélice tiene forma de hélice. Que una distribución tenga la simetría de una hélice significa que si se la rota un ángulo α alrededor de un eje $\mathbf{n}$ y luego se la traslada una distancia $s = \lambda\alpha$ en la misma dirección de $\mathbf{n}$, entonces queda invariante. La constante λ define el paso de la hélice: por cada rotación de 2π hay que avanzar una distancia de $2\pi\lambda$ en la dirección de $\mathbf{n}$. Formalmente, tenemos que componer las dos operaciones. La existencia de la simetría se expresa como

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}) = \rho\big[\mathrm{R}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \lambda\alpha\,\mathbf{n}\big]. \tag{42}$$

El potencial transforma del mismo modo que la densidad, de modo que la simetría implica

$$\bar{V}(\mathbf{r}) = V\big[\mathrm{R}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, -\alpha) - \lambda\alpha\,\mathbf{n}\big] = V(\mathbf{r}). \tag{43}$$

En coordenadas cilíndricas, tomando el eje de simetría en la dirección de z, queda

$$V(\rho, z - \lambda\alpha, \varphi - \alpha) = V(\rho, z, \varphi). \tag{44}$$

Antes, en casos similares, sacábamos alguna conclusión acerca de las variables de las que podía o no podía depender V. Ahora esa información está un poco más oculta. Leída en términos de α, la ecuación anterior significa que

$$\frac{d}{d\alpha}\big[V(\rho, z - \lambda\alpha, \varphi - \alpha)\big] = 0. \tag{45}$$

De esto resulta

$$\lambda\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \tag{46}$$

Nos gustaría traducir esta condición sobre las derivadas a una condición sobre la dependencia explícita de V en las variables φ y z.

Tal vez hallan visto en alguna ocasión que si $f(x, y)$ es tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{47}$$

f se puede escribir en términos de una función de una sola variable, $f(x, y) = g(x - y)$.

(Para demostrarlo hay que notar que siempre es posible escribir cualquier función de x e y como una función F de $u = x + y$ y $v = x - y$, donde

$$f(x, y) = F(x + y, x - y), \text{ con } \quad F(u, v) = f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right). \tag{48}$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial F}{\partial u}. \tag{49}$$

Entonces, si el miembro de la izquierda es cero, debe ser $\partial F/\partial u = 0$, y, por lo tanto,

$$f(x, y) = F(x - y), \tag{50}$$

que es lo que queríamos demostrar).

Volviendo a la ec. (46), podemos reescribirla como

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \lambda\varphi} = 0. \tag{51}$$

Usando el resultado que acabamos de citar, en definitiva esto implica

$$V(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z - \lambda\varphi), \tag{52}$$

que es nuestra conclusión principal.

Puesto que el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \varphi, z) \tag{53}$$

y debido a que en la energía cinética no aparecen ni z ni φ, la relación (46) será válida también para $\mathcal{L}$,

$$\lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \tag{54}$$

Evaluando sobre una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, esto implica

$$\lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0. \tag{55}$$

Es decir, existe una ley de conservación para

$$\mathcal{H} = \lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \lambda p_z + L_z, \tag{56}$$

donde p_z es el impulso lineal en la dirección z y L_z es la componente z del momento angular. Este fue el resultado al que llegamos en clase. Lo que agregamos aquí fue la demostración de que una hélice genera un potencial que tiene la simetría de la hélice. En la página siguiente se muestra una representación 3D del potencial de la hélice.