Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase práctica del lunes 9/9. *Guía 4. Fuerzas centrales. Kepler. Precesión de las órbitas.*[*]

1. Ecuaciones que no pueden faltar en ninguna mesa

Los problemas de fuerzas centrales tienen de bueno que todo lo que se necesita puede ser deducido en pocos pasos y, una vez aprendida, la deducción no se olvida más. En estas notas consideraremos el movimiento de una partícula de masa m en un campo de fuerzas central producido por un punto fijo en el origen. Si se tratara de un problema de dos cuerpos, esto es equivalente al movimiento de una partícula de masa reducida μ cuya posición está dada por la diferencia de las posiciones de las dos partículas.

1.1. Ecuación de la trayectoria

Que la fuerza sea central significa que se conserva el momento angular respecto del centro de fuerzas. Que se conserve el momento angular implica que el movimiento ocurre en un plano. Que el movimiento ocurra en un plano significa que podemos tomar coordenadas r y φ, donde r es la distancia al centro de fuerzas, ubicado en el origen, y φ se mide en el plano del movimiento a partir de una dirección arbitraria, que suele tomarse como la de un punto de retorno, si lo hubiere. (En un punto de retorno $\dot{r} = 0$).

La conservación de la energía implica

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \mathcal{E}, \tag{1}$$

y la conservación del momento angular,

$$m\dot{\varphi}r^2 = l. \tag{2}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

Juntas, estas dos conservaciones permiten reducir el problema a un problema unidimensional equivalente, gobernado por una ecuación de conservación de la forma

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \mathcal{E}. \tag{3}$$

Este suele ser el punto de partida en la mayoría de los problemas. Podríamos llamarla *ecuación diferencial de la trayectoria*, puesto que da una relación entre la posición y el tiempo. El problema unidimensional equivalente es el de una partícula que se mueve en el eje r bajo un potencial efectivo dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r). \tag{4}$$

Siempre es una buena idea graficar el potencial efectivo. Allí se verán los rangos de energía para cada tipo de movimiento, la existencia o no de órbitas circulares, la posibilidad de movimiento acotado, la posibilidad de caída al centro de fuerzas o de escape al infinito.

En contados casos la ec. (3) puede resolverse por cuadraturas (esto es, integrarse en términos de funciones conocidas), lo que supone resolver la siguiente integral

$$t + \mathcal{C} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{l^2}{2mr^2} - V(r)}}, \tag{5}$$

y aun así esto da $t(r)$ cuando uno en verdad querría $r(t)$.

Para integrar el problema numéricamente es más práctica la ecuación de segundo orden que resulta de derivar la ec. (3) respecto del tiempo. Se obtiene así una ecuación diferencial para el movimiento radial donde la fuerza contiene un término centrífugo,

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - V'(r). \tag{6}$$

Es lo que uno obtendría en coordenadas polares igualando la fuerza a la masa por la aceleración. El término asociado a la aceleración centrípeta se pasa al segundo miembro y la ecuación toma la forma de un movimiento unidimensional bajo la acción de una fuerza efectiva. La fuerza efectiva es la que produce el potencial $V(r)$ más la fuerza centrífuga.

1.2. Ecuación de la órbita

Otra ecuación que no puede faltar es la que se obtiene a partir de la ec. (3) cambiando de variable independiente de t a φ. Para eso, primero escribimos

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{7}$$

Por otro lado, a partir de la ec. (2), tenemos

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}, \tag{8}$$

por lo tanto

$$\dot{r} = \frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{9}$$

Finalmente, reemplazando en la ec. (3), queda

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \mathcal{E}. \tag{10}$$

Esta es la ecuación diferencial de la órbita. El cambio de variables de t a φ tiene la buena propiedad de ser uno a uno, ya que el signo de $\dot{\varphi}$ nunca cambia, según se ve en la ec. (8).

La ec. (10) da otra oportunidad de resolver el problema por cuadraturas, lo que también sólo es posible en contados casos:

$$\varphi + \mathcal{C} = \pm \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{\dfrac{2m}{l^2}\left[\mathcal{E} - V(r)\right] - \dfrac{1}{r^2}}}. \tag{11}$$

Y aun así obtenemos $\varphi(r)$, en lugar de $r(\varphi)$. Parece oportuno hacer en la integral el cambio de variables $u = 1/r$ que, dependiendo de la forma de V, puede ser útil como no:

$$\varphi + \mathcal{C} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\dfrac{2m}{l^2}\left[\mathcal{E} - V(1/u)\right] - u^2}}. \tag{12}$$

Haber hecho el cambio de variables $u = 1/r$ dentro de la integral en la ec. (11) sugiere intentar hacerlo al nivel de las ecuaciones diferenciales. Con este cambio, la ec. (10) se lee

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{l^2}\,V(1/u) = \frac{2m\mathcal{E}}{l^2}. \tag{13}$$

Es fundamental saber llegar hasta esta ecuación. En casos especiales, se puede integrar muy fácilmente, por ejemplo, cuando $V(r) = -k/r$, que es el problema de Kepler. Usualmente es más sencillo leer la solución de la ec. (13) que resolver la integral (12).

Derivando respecto de φ la ec. (13) y cancelando un factor $du/d\varphi$,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{m}{l^2u^2}V'(1/u) = 0. \tag{14}$$

Esta ecuación es mucho muy importante. Se la conoce como ecuación de Binet. No sólo permite integrar la órbita $u(\varphi)$ conocida la fuerza, sino que permite determinar la fuerza conocida la órbita. Puede reescribirse de forma más refinada observando que $V' = -F$,

$$-\frac{l^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = F(1/u). \tag{15}$$

No hay mucho más que esto: el cambio de variable de t a φ y el cambio de variable de r a $1/r$, todo a partir de las ecs. (2) y (3). En general, la sustitución de la variable r debe ajustarse según la forma del potencial. Por ejemplo, en el caso del oscilador isótropo, el cambio adecuado es $u = 1/r^2$.

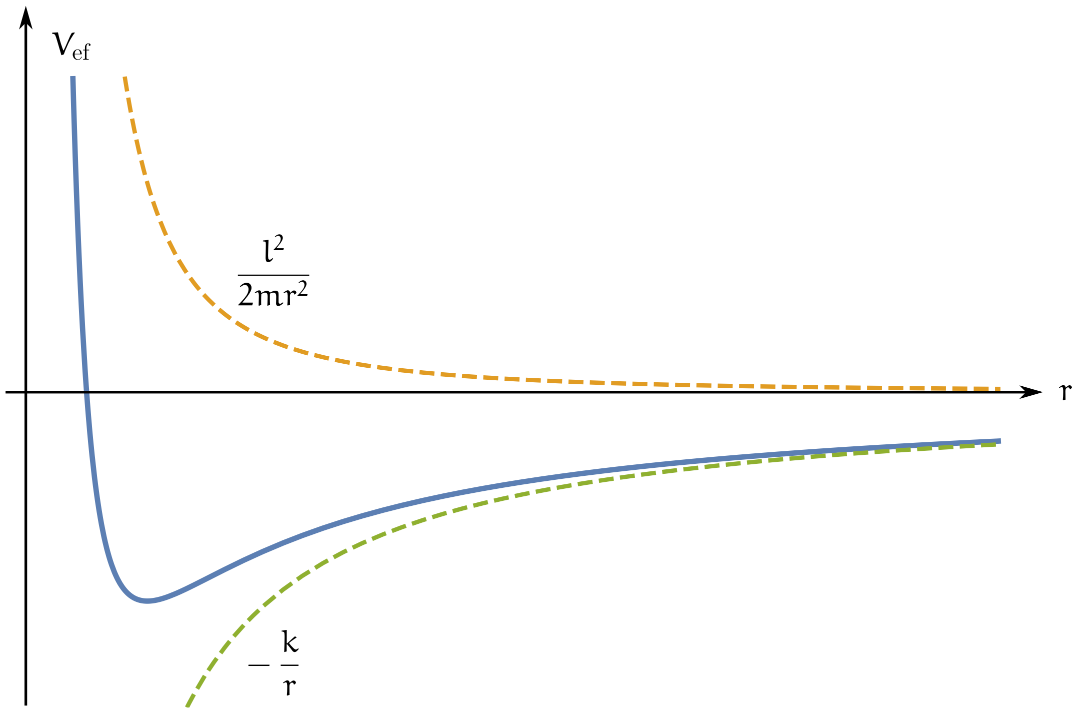
2. El problema de Kepler: ecuación de la órbita

Veremos varias maneras de resolver el problema del potencial atractivo $V(r) = -k/r$. Lo primero que trataremos de hacer es encontrar la ecuación de la órbita $r(\varphi)$. Con los resultados de la sección anterior tenemos tres caminos, a saber:

- Calcular la integral de la ec. (12) e invertir para obtener $r(\varphi)$.
- Integrar la ecuación diferencial (13) para $u(\varphi)$.
- Integrar la ecuación diferencial (14) para $u(\varphi)$.

Las dos últimas alternativas son muy similares. La diferencia está en la experiencia de quien resuelve el problema. La ec. (13) es una ecuación de conservación. La ec. (14) es una ecuación de movimiento. Uno puede estar más familiarizado con uno u otro tipo de ecuación, como veremos en seguida. Aclaremos que, igual a lo que sucede con el teorema de Pitágoras, hay muchísimas formas de llegar a la órbita en el problema de Kepler. Nosotros sólo veremos las tres que mencionamos, y apenas si puede decirse que sean distintas una de otra.

Antes de seguir, mostramos aquí abajo el potencial efectivo para el problema del potencial atractivo de tipo $1/r$ con $l \neq 0$.



Se ve que para $\mathcal{E} > 0$ el movimiento es no acotado. En general, siempre existe un radio de mínimo acercamiento. La partícula no puede caer al centro de fuerzas. Para energías negativas, el movimiento es acotado, y hay un valor de la energía que da una órbita circular. Ese valor es el del mínimo del potencial efectivo. No hay movimientos con energías menores a la del mínimo del potencial efectivo.

2.1. Primer método

Cuando el potencial es $V(r) = -k/r$, la ec. (12) se escribe como

$$\varphi + \mathcal{C} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}[\mathcal{E} + ku] - u^2}}. \tag{16}$$

La forma de resolver esta integral consiste en completar cuadrados dentro de la raíz,

$$\frac{2m}{l^2}[\mathcal{E} + ku] - u^2 = \frac{m^2k^2}{l^4}\left[\left(1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}\right) - \left(\frac{l^2u}{mk} - 1\right)^2\right]. \tag{17}$$

Con este reemplazo, queda

$$\varphi + \mathcal{C} = \mp \frac{l^2}{mk} \int \frac{du}{\sqrt{\left(1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}\right) - \left(\frac{l^2u}{mk} - 1\right)^2}}. \tag{18}$$

Salvo por cambios de variables triviales, la integral que hay que resolver es del tipo

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{A}. \tag{19}$$

Así resulta

$$\varphi + \mathcal{C} = \pm \arccos\left[\frac{1}{e}\left(\frac{l^2u}{mk} - 1\right)\right], \tag{20}$$

donde

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}}. \tag{21}$$

Finalmente,

$$r = \frac{1}{u} = \frac{l^2/mk}{1 \pm e\cos(\varphi + \mathcal{C})}. \tag{22}$$

Hemos postergado hasta este punto la elección del signo y de la constante $\mathcal{C}$. La condición inicial más sencilla es que en $t = 0$ sea $\varphi = 0$ y que en ese instante $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} > 0$. En otras palabras, elegir el punto $\varphi = 0$ cuando r toma su valor mínimo. Esto lleva a la elección $\mathcal{C} = 0$ y a quedarnos con el signo positivo frente al coseno en la ec. (22). En definitiva,

$$r(\varphi) = \frac{l^2/mk}{1 + e\cos\varphi}. \tag{23}$$

2.2. Segundo método

Según vimos, si en lugar de integrar directamente la ecuación de conservación, hacemos primero el cambio de variables de r a $1/r$ el resultado es la ec. (13), que en el caso del potencial $V(r) = -k/r$ se lee como

$$u'^2 + u^2 - \frac{2mk}{l^2}u = \frac{2m\mathcal{E}}{l^2}, \tag{24}$$

donde las primas significan derivadas respecto de φ. Esta ecuación es análoga a la ecuación de conservación de la energía para un oscilador en un campo gravitatorio uniforme. Pero tampoco es necesario darse cuenta de eso. La continuación natural es completar cuadrados, de lo que resulta

$$u'^2 + \left(u - \frac{mk}{l^2}\right)^2 = \left(\frac{mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk}\right), \tag{25}$$

que es más fácil de reconocer. Si en lugar de derivadas respecto de φ fueran derivadas respecto del tiempo enseguida reconoceríamos la ecuación de conservación de la energía para un oscilador cuya elongación se mide a partir del punto $u_0 = mk/l^2$. La solución es por lo tanto la de un oscilador con su punto de equilibrio en u_0 y con amplitud

$$A = \frac{mk}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk}}. \tag{26}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{mk}{l^2} + \frac{mk}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk}}\cos(\varphi + \varphi_0) \\ &= \frac{mk}{l^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk}}\cos(\varphi + \varphi_0)\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

Si elegimos el punto $\varphi = 0$ como aquel en que u es máximo (y por lo tanto r es mínimo), debe ser $\varphi_0 = 0$, y entonces, igual que antes, encontramos

$$r(\varphi) = \frac{l^2/mk}{1 + e\cos\varphi}, \tag{28}$$

donde e está dada por la ec. (21).

2.3. Tercer método

Partimos directamente de la ecuación de Binet, ec. (14), que para el potencial $V(r) = -k/r$ se reduce a

$$u'' + u = \frac{mk}{l^2}. \tag{29}$$

Ahora es aún más patente que la ecuación es la de un oscilador. La inhomogeneidad en la ecuación anterior puede salvarse escribiendo

$$\left(u - \frac{mk}{l^2}\right)'' + \left(u - \frac{mk}{l^2}\right) = 0. \tag{30}$$

La inclusión de una constante en el primer término no tiene ningún efecto. Inmediatamente vemos que

$$u(\varphi) = \frac{mk}{l^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0). \tag{31}$$

Si asumimos que en φ_0 es $u' = 0$, debe ser $\varphi_0 = n\pi$. Siempre podemos elegir φ_0 de modo que A resulte mayor que cero. Por simplicidad asumimos que $\varphi_0 = 0$. El valor de A está relacionado con el de la energía y el del momento angular. Cuando $u' = 0$, la energía viene dada por

$$\mathcal{E} = \frac{l^2 u_0^2}{2m} - k u_0 = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{mk}{l^2} + A\right)^2 - k\left(\frac{mk}{l^2} + A\right) = -\frac{mk^2}{2l^2} + \frac{l^2}{2m}A^2. \tag{32}$$

Luego,

$$A = \frac{mk}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}}. \tag{33}$$

Entonces, igual que antes, obtenemos

$$u(\varphi) = \frac{mk}{l^2}\left(1 + e\cos\varphi\right), \tag{34}$$

o, como ya hemos visto,

$$r(\varphi) = \frac{l^2/mk}{1 + e\cos\varphi}, \tag{35}$$

con

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}}. \tag{36}$$

2.4. Movimiento acotado

Ahora restringiremos nuestro análisis al caso del movimiento acotado, cuando

$$-\frac{mk^2}{2l^2} \leqslant \mathcal{E} < 0. \tag{37}$$

La cota inferior es el valor del potencial efectivo en el mínimo. El gráfico del potencial efectivo indica que habrá dos puntos de retorno. Eso también se ve en la ec. (35). Hay que notar que las cotas en el valor la energía implican que el valor de e estará limitado por

$$0 \leqslant e < 1. \tag{38}$$

Por lo tanto el denominador en la ec. (35) no puede anularse nunca. Más aún, r toma su valor mínimo en $\varphi = 2n\pi$ y el máximo en $\varphi = (2n+1)\pi$, con n entero en los dos casos. Limitémonos a la primera revolución, con $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. El radio mínimo se produce en $\varphi = 0$, y el máximo en $\varphi = \pi$, que es el punto diametralmente opuesto. Así, la máxima extensión entre dos puntos de la órbita es

$$2a \equiv \frac{l^2}{mk}\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right), \tag{39}$$

lo que implica que

$$\frac{l^2}{mk} = (1 - e^2)a. \tag{40}$$

Con esto la ecuación de la órbita se lee como

$$r(\varphi) = \frac{(1-e^2)a}{1 + e\cos\varphi}, \tag{41}$$

que es la ecuación de una elipse en coordenadas polares con el origen en uno de sus focos (ver siguiente sección).

Es importante recordar la relación que hay entre la energía y el semieje mayor a: es la misma que habría entre la energía y el radio si la órbita de la partícula fuera circular y tuviera radio a. En efecto, a partir de la ec. (40) y de la ec. (36) se obtiene

$$\frac{l^2}{mk} = -\frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}a, \tag{42}$$

y entonces

$$\mathcal{E} = -\frac{k}{2a}. \tag{43}$$

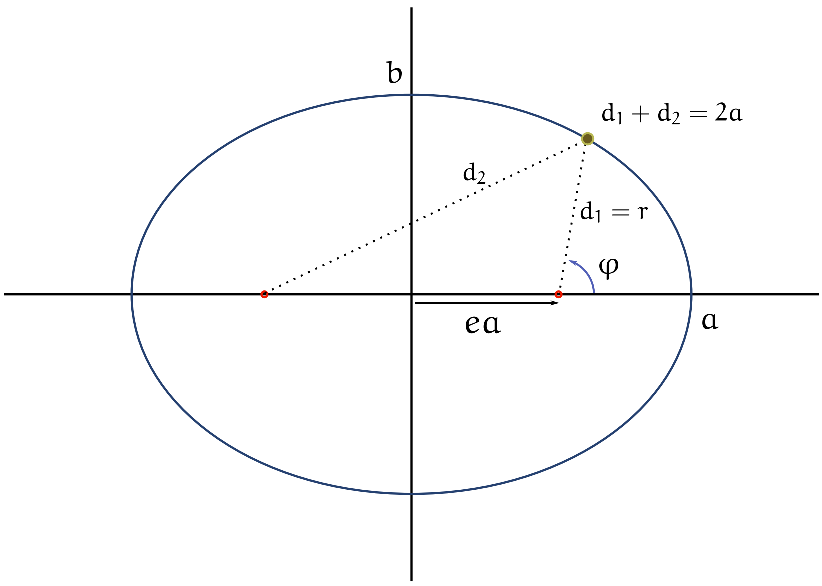
Se recordará que para una órbita circular la energía total es igual a un medio de la energía potencial (si no, demostrarlo en dos líneas).

2.5. La órbita para $\mathcal{E} < 0$ es una elipse

Hay varios caminos para verificar que

$$r(\varphi) = \frac{(1-e^2)a}{1+e\cos\varphi} \tag{44}$$

es la ecuación de una elipse en coordenadas polares, con el origen de coordenadas en uno de sus focos. Pero conviene tener antes una idea de cómo participan en la definición de la elipse su excentricidad y las longitudes de sus semiejes.



Los focos de una elipse de excentricidad e están sobre su semieje mayor, simétricos respecto de su centro, y a una distancia $2ea$ uno del otro. Es decir, cada foco está a distancia ea del centro de la elipse. Puesto que la elipse se define como el conjunto de puntos cuya suma de las distancias a los focos es constante, analizando esta condición en los puntos de

$r_{\min}$ o de $r_{\max}$ es fácil ver que esa constante es $2a$. Además, si el semieje menor de la elipse tiene una longitud b, la condición de suma de distancias a los focos igual a $2a$ implica

$$2\sqrt{b^2 + (ea)^2} = 2a, \tag{45}$$

de donde se deduce que

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \tag{46}$$

Tampoco hay que olvidar que si las coordenadas x e y se toman desde el centro de la elipse entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{47}$$

Si uno quiere escribir la ecuación de la elipse en coordenadas polares, con el centro de coordenadas en uno de sus focos, un camino es escribir, según se ve de la figura anterior,

$$x = ea + r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \tag{48}$$

reemplazar esto en la ec. (47) y perseverar hasta llegar a la ec. (44).

Otro camino consiste en formular la propiedad de la suma de las distancias como

$$r + |\mathbf{r} + 2ea\,\hat{x}| = 2a. \tag{49}$$

Por este camino las cuentas resultan triviales. Fíjense si no.

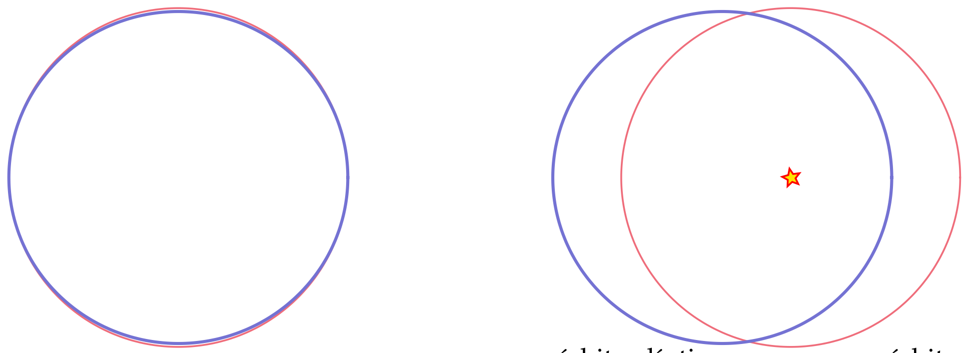
2.6. ¿Cuánta excentricidad es mucha excentricidad?

De todos los planetas, luego de la expulsión de Plutón, el que tiene la mayor excentricidad es Mercurio. La órbita de Mercurio tiene una excentricidad $e \approx 0{,}2$, que se traduce en una relación entre los semiejes $a/b = (1-e^2)^{-1/2} \approx 1{,}02$. Sobre el papel, es difícil distinguir el dibujo de esta órbita del de una circunferencia. Sin embargo, de una manera más sutil, la órbita elíptica de Mercurio está lejos de confundirse con una órbita circular. La diferencia no se halla en la comparación de los semiejes, sino en las distancias de máximo y mínimo acercamiento al centro de fuerza. La relación entre estas dos distancias es

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1+e}{1-e} \approx 1{,}5 \tag{50}$$

que no es una cantidad que pase desapercibida. Sería muy difícil de otro modo observar tal cosa como la precesión del perihelio de Mercurio.

La figura siguiente muestra, a la izquierda, centradas en el mismo punto, una circunferencia de radio 1 y la elipse de semieje menor 1 y excentricidad $e = 0{,}2$. Las dos curvas son muy próximas y apenas se distinguen una de la otra a simple vista. Pero en el problema de Kepler, el centro de la órbita circular es el foco de la órbita elíptica, como en la figura de la derecha.



Ya no hay ningún riesgo de confundir las dos órbitas. Lo que las distingue es la posición del centro de fuerzas respecto de sus centros. La figura de la página siguiente compara la órbita circular con elipses de excentricidad creciente. Un valor de $e > 0{,}1$ parecería dar el criterio para decidir cuándo la excentricidad es significativa.

3. El problema de Kepler: ecuación de la trayectoria (no llegó a verse en clase)

Seguimos analizando únicamente el caso $\mathcal{E} < 0$. Ya vimos cómo calcular la ecuación de la órbita, $r(\varphi)$. Para encontrar la trayectoria $r(t)$ sería necesario resolver la integral de la ec. (5) para el potencial $V(r) = -k/r$.

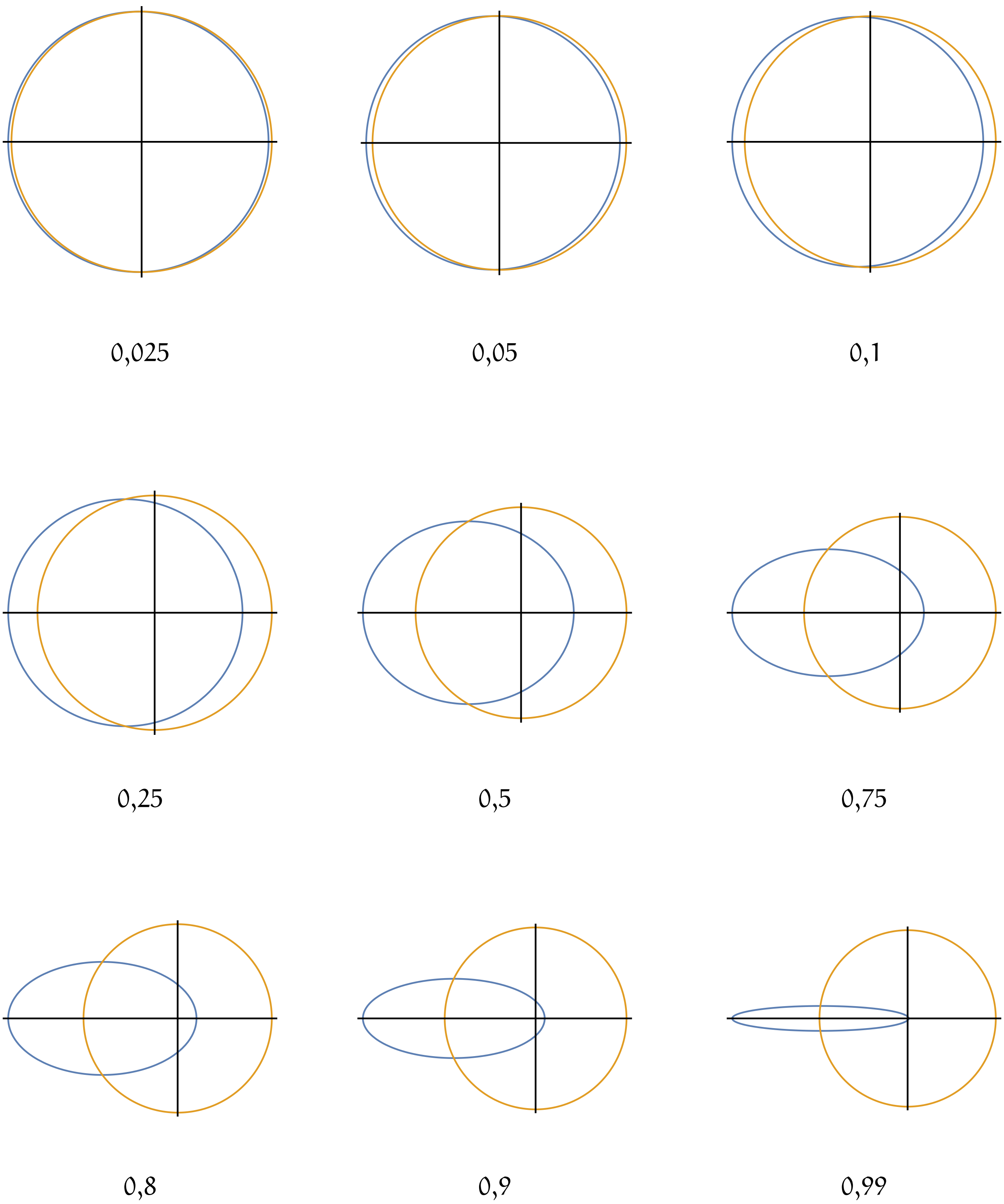
$$t + \mathcal{C} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{l^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{r}}}. \tag{51}$$

Si tomamos $t = 0$ como el instante de mínimo acercamiento, debemos elegir el signo positivo frente a la integral, pues dr y dt tienen el mismo signo: a medida que el tiempo aumenta el radio también. Entonces queda

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{l^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{r}}}. \tag{52}$$

Esto funciona desde $r = r_{\min}$ hasta $r = r_{\max}$, de decir, durante media órbita. Si queremos continuar la integración hay que modificar el signo de la integral, puesto que pasado $r_{\max}$ la relación entre los diferenciales de r y de t cambia de signo. La función t será multivaluada, a un mismo r corresponderán varios valores de t, lo que es natural, porque el movimiento es periódico. Durante la segunda mitad de la órbita, entre el primer paso por $r_{\max}$ y el regreso a $r_{\min}$ la relación entre t y r es

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{l^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{r}}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\max}}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{l^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{r}}}. \tag{53}$$



Órbitas de semieje mayor igual a 1 pero distintas excentricidades, comparadas a su vez con la órbita circular de radio 1. El centro de fuerzas está en el centro de la órbita circular.

Nos concentraremos en la ec. (52), que describe media órbita. Contrariamente a la primera intuición, no conviene hacer aquí el cambio de variables $u = 1/r$, sino seguir con la variable r.

Sacando factor común $1/r^2$ y completando cuadrados, la ec. (52) se escribe como

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{\mathcal{E}\left(r + \frac{k}{2\mathcal{E}}\right)^2 - \frac{k^2}{4\mathcal{E}}\left(1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{mk^2}\right)}}. \tag{54}$$

Usando la definición de la excentricidad (36), la relación (43) entre la energía y el semieje mayor, y el hecho de que, para el movimiento acotado, $\mathcal{E} = -|\mathcal{E}|$, se obtiene

$$t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int_{r_{\min}}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}. \tag{55}$$

Análogamente, a partir de la ec. (53), para la segunda mitad de la órbita resulta

$$t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} - \sqrt{\frac{ma}{k}} \int_{r_{\max}}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}. \tag{56}$$

Fijémonos por ahora en el primer tramo de la órbita, aquel descripto por la ec. (55). Se trata de tomar una decisión: definir $(r-a)/ae$ como el seno o como el coseno de una dada variable E. Ambos cambios de variable llevan a una integral conocida. Como la nueva variable E (no confundir con la energía: la E es por *excéntrico*) tendría la interpretación de un ángulo, y debido a que estamos fijando todas las constantes de integración cuando r pasa por el mínimo, lo ideal sería que E fuera igual a cero cuando r tomara el mínimo valor, $r_{\min} = (1-e)a$. Si eligiéramos $(r-a)/ae = \sin E$, nos quedaría $r = a$ cuando $E = 0$. No funciona. Si en cambio definimos $(r-a)/ae = \cos E$, en $E = 0$ queda $r = (1+e)a$, que es el radio máximo. Le estamos errando por π. Tampoco funciona. Necesitamos un signo menos. En definitiva, si hacemos el cambio de variables

$$r - a = -ae\cos E, \tag{57}$$

tanto el ángulo E como el ángulo φ como el tiempo t valen cero cuando $r = r_{\min}$. Variando E entre 0 y π podemos recorrer todo el intervalo de tiempos durante media órbita. Notar que para E entre 0 y π, la raíz cuadrada que aparece en el denominador en la ec. (55) es

$$\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2} = ae\sqrt{1-\cos^2 E} = ae\sin E. \tag{58}$$

Lo importante aquí es el signo: en el intervalo $0 \leqslant E \leqslant \pi$, es $\sin E = +\sqrt{1-\cos^2 E}$. En conclusión, hecho el cambio de variables (57), la ec. (55) se transforma en esta otra

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^E dE\,(1 - e\cos E) = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(E - e\sin E). \tag{59}$$

Para integrar el segundo tramo de la órbita debemos usar la ec. (56). Recurriendo al resultado anterior para escribir la primera integral, tenemos

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^{\pi} dE\ (1 - e\cos E) - \sqrt{\frac{ma}{k}} \int_{r_{max}}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}. \tag{60}$$

En la segunda integral podemos hacer el mismo cambio de variables (57), pero tomando ahora $\pi \leqslant E < 2\pi$, lo que hace variar r entre r_{max} y r_{min}. Para E en ese intervalo, la raíz que aparece en el denominador de la ec. (60) es

$$\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2} = ae\sqrt{1 - \cos^2 E} = -ae\sin E. \tag{61}$$

Lo importante aquí es el signo en la última igualdad: en el intervalo $\pi \leqslant E \leqslant 2\pi$, resulta $\sin E = -\sqrt{1 - \cos^2 E}$. Hecho pues el cambio de variables, para la segunda mitad de la órbita resulta

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^{\pi} dE\ (1 - e\cos E) + \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_{\pi}^{E} dE\ (1 - e\cos E) \\ &= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^{E} dE\ (1 - e\cos E) = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(E - e\sin E). \end{aligned} \tag{62}$$

Puesto que tiene la misma forma que la ec. (59), esto nos permite escribir el tiempo t como una función univaluada del ángulo E,

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(E - e\sin E) \tag{63}$$

para todo el intervalo de E entre 0 y 2π. Notar que, en términos de r, teníamos que separar t en dos ramas. Ahora no hace falta. Notar, asimismo, que, si evaluamos la ec. (63) en $E = 2\pi$, el tiempo t corresponde a un período. Luego,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{k}}. \tag{64}$$

Mediante el procedimiento que acabamos de seguir llegamos a una definición paramétrica de la órbita. El parámetro E se llama anomalía excéntrica. No tenemos $r(t)$, sino

$$\begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{ma^3}{k}}(E - e\sin E), \\ \\ r = a(1 - e\cos E). \end{cases} \tag{65}$$

Evaluando E entre 0 y 2π produciríamos todos los pares de valores (t, r).

Usando el resultado (64) para el período, la ecuación para el tiempo también se escribe como

$$\omega t \equiv M = E - e\sin E, \tag{66}$$

donde $\omega = 2\pi/T$. Notar que M tiene una velocidad uniforme y que completa un período luego de un tiempo T. El ángulo M recibe el nombre de anomalía media, y es esencialmente equivalente a t. Es el ángulo polar que tendría la partícula si se moviera en una órbita circular cuyo radio fuera igual al semieje mayor de la elipse: en verdad, igualando fuerza con masa por aceleración, para una órbita circular de radio a y frecuencia angular ω_c, debe cumplirse

$$m\omega_c^2 a = \frac{k}{a^2}, \tag{67}$$

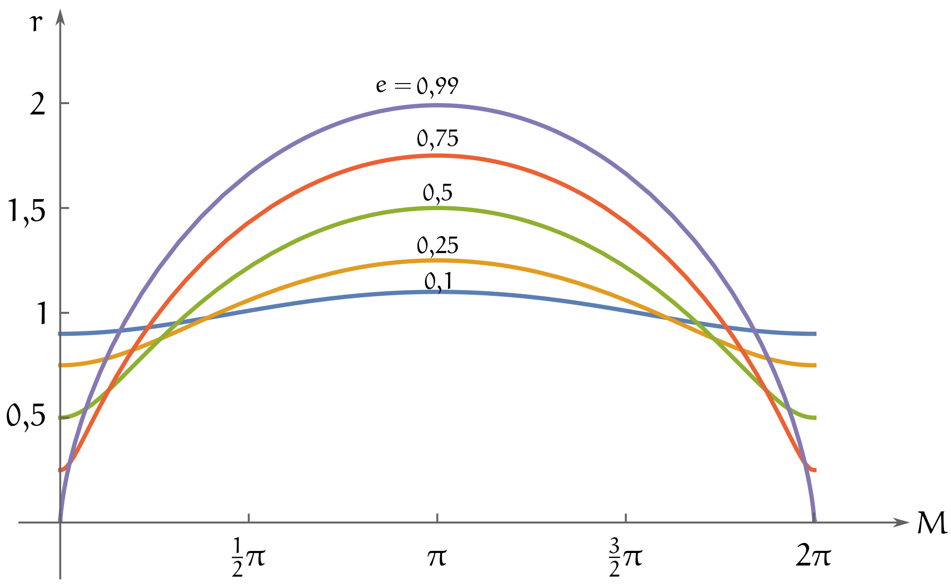
y de aquí se ve que ω_c es la frecuencia asociada al período T que definimos en la ec. (64).

Así como antes notamos que la relación entre la energía y el semieje a era la misma que había entre la energía y el radio de una órbita circular, ahora señalamos que la relación entre el período y el semieje también es la misma que la que hay entre el período y el radio de una órbita circular, según quedó demostrado más arriba. En términos de las constantes del movimiento podemos reescribir la ec. (64) en la siguiente forma:

$$T = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|\mathcal{E}|^3}}. \tag{68}$$

Lo interesante de este resultado es que el período es independiente del momento angular. Órbitas con la misma energía comparten el mismo valor del semieje y del período.

La figura siguiente muestra el gráfico de la curva paramétrica $\{M(E), r(E)\}$ para distintos valores de la excentricidad, pero igual valor del semieje mayor. Pueden demostrar como ejercicio que la distancia media al centro de fuerza es $(1 + e^2/2)a$.



■ Un comentario al margen: la ecuación

$$M = E - e \sin E \tag{69}$$

se conoce con el nombre de ecuación de Kepler. Si fuéramos capaces de invertirla significaría tener r como función de t. A propósito de esta ecuación, Arnold comenta lo siguiente:

> **REMARK.** In modern notation Kepler's equation has the form $x - e\sin x = t$. This equation plays an important part in the history of mathematics. From the time of Newton the solution x has been sought in the form of a series in powers of the eccentricity e. The series converges when $|e| \leq 0.662743\ldots$
>
> The investigation of the origin of this mysterious constant led Cauchy to the creation of complex analysis.
>
> Such fundamental mathematical concepts and results as Bessel functions, Fourier series, the topological index of a vector field, and the "principle of the argument" of the theory of functions of a complex variable also first appeared in the investigation of Kepler's equation.

V. Arnold, *Huygens And Barrow, Newton And Hooke*, Birkhauser Verlag Basel (1990), p. 85.

4. Potenciales $V(r) + c/r^2$

Por lo común, todo lo que uno necesita para empezar a resolver un problema de fuerzas centrales son las ecuaciones de conservación de la energía y del momento angular. Si el potencial es $V(r)$, debe ser

$$\begin{cases} m\dot{\varphi}r^2 = l, \\ \\ \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \mathcal{E}. \end{cases} \tag{70}$$

No son muchos los potenciales para los que estas ecuaciones pueden integrarse explícitamente. Pero por cada potencial $V(r)$ que uno sepa integrar existe con seguridad otro que también, y que es

$$\mathcal{V}_c(r) = V(r) + \frac{c}{r^2}, \tag{71}$$

donde c es una constante cualquiera. Esta observación es poco menos que trivial: el nuevo término puede absorberse en la ecuación de conservación de la energía mediante la redefinición de l:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \mathcal{V}_c(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \mathcal{E}, \tag{72}$$

donde

$$L^2 = l^2 + 2mc. \tag{73}$$

Esto, a su vez, supone modificar la ecuación para la conservación del momento angular mediante una redefinición del ángulo, de φ a Φ, para que aparezca L en lugar de l,

$$m\dot{\Phi}r^2 = L^2, \tag{74}$$

con

$$\Phi = \frac{L}{l}\varphi = \sqrt{1 + \frac{2mc}{l^2}}\,\varphi. \tag{75}$$

El momento angular modificado, L, puede ser menor o mayor que el momento angular l, dependiendo del signo de c. Pero para que el cambio de variables tenga sentido debemos pedir que $c > -l^2/2m$. Queda como ejercicio analizar el caso en que esta condición no se cumple.

La ampliación de nuestro catálogo de potenciales resolubles mediante el simple expediente de sumar un término c/r^2 es trivial. Sin embargo, tiene su utilidad: a menudo las perturbaciones al potencial $V(r)$ pueden escribirse como un término de la forma c/r^2.

En conclusión, el nuevo problema tiene las dos leyes de conservación

$$\begin{cases} m\dot{\Phi}r^2 = L, \\ \\ \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \mathcal{E}, \end{cases} \tag{76}$$

y se reduce al problema original (70).

4.1. El problema de Kepler modificado: precesión de la órbita

La ecuación de la órbita del problema de Kepler para el movimiento acotado era

$$r(\varphi) = \frac{l^2/mk}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{2l^2|\mathcal{E}|}{mk^2}}\,\cos\varphi}. \tag{77}$$

Si sumamos al potencial gravitatorio un término c/r^2, la solución del problema modificado requiere reemplazar l por L y φ por Φ, ecs. (73) y (75). De esta forma obtenemos

$$r = \frac{L^2/mk}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{2L^2|\mathcal{E}|}{mk^2}}\,\cos\Phi}. \tag{78}$$

Introduciendo como antes el semieje a y la excentricidad e, y escribiendo Φ en términos de φ, llegamos a una forma más despejada del resultado que de verdad nos interesa:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\alpha\varphi}, \tag{79}$$

donde

$$\alpha = \frac{L}{l} = \sqrt{1 + \frac{2mc}{l^2}}. \tag{80}$$

Si c fuera igual a cero, sería α igual a 1 y r como función de φ tendría período 2π. Si la partícula partiese del periápside (punto en el que r es mínimo) en $\varphi = 0$, regresaría al periápside luego de que φ haya variado en 2π. Se trata del movimiento elíptico que hemos analizado antes. Ahora bien, si $\alpha \neq 1$, una variación de φ en 2π no lleva al mismo valor inicial de r. El período radial deja de ser igual al período angular.

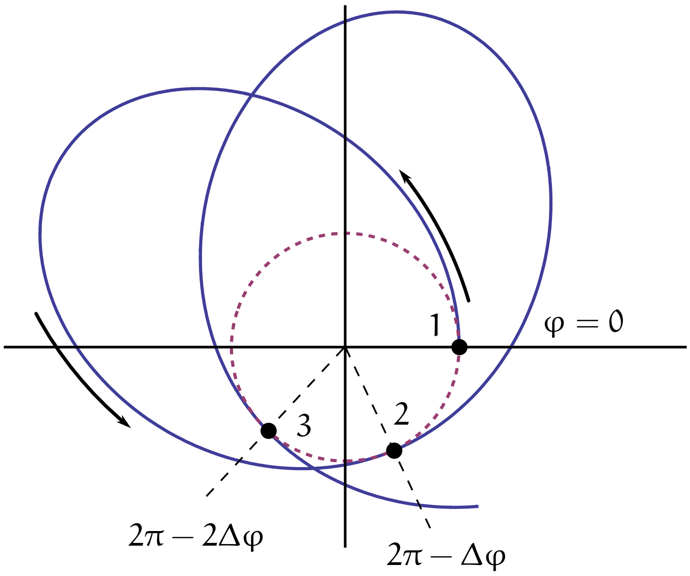
Si $c > 0$, entonces $\alpha > 1$. Considerada como función de φ, el radio tendrá un período

$$\tau = \frac{2\pi}{\alpha} < 2\pi. \tag{81}$$

Un conjunto de puntos característicos de la órbita son los periápsides. Tomaremos estos puntos como referencia y los seguiremos a lo largo de la órbita. El resultado anterior implica que cada paso por el periápside se produce antes de que se complete una revolución angular. Si el primer paso ocurre en $\varphi = 0$, el segundo paso sucede en $2\pi/\alpha$. Pasos sucesivos se van atrasando en la misma cantidad. Dos pasos consecutivos por el periápside distarán, en valor absoluto, un ángulo

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right). \tag{82}$$

La figura muestra un ejemplo donde se indican tres pasos sucesivos por el periápside:



El tiempo entre dos pasos sucesivos es igual al período temporal del movimiento radial que, según vimos en la ec. (64), sólo depende del valor del semieje mayor,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{k}}. \tag{83}$$

Tiene sentido definir la velocidad de precesión como

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{T}. \tag{84}$$

Si el término c/r^2 puede ser considerado como una perturbación, entonces α será muy próximo a 1,

$$\alpha = \frac{L}{l} = \sqrt{1 + \frac{2mc}{l^2}} \approx 1 + \frac{mc}{l^2}, \tag{85}$$

lo que, al mismo orden, implica

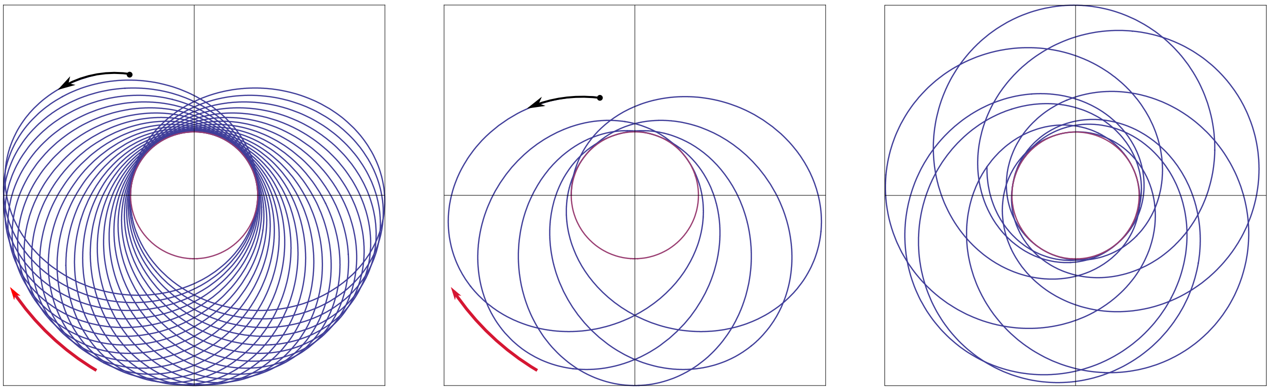
$$\Delta\varphi \approx 2\pi\frac{mc}{l^2}. \tag{86}$$

Luego,

$$\omega_p \approx \frac{mc}{l^2}\sqrt{\frac{k}{ma^3}}. \tag{87}$$

La velocidad de precesión representa la velocidad angular a la que se desplaza el punto de mínimo acercamiento. No es en verdad la velocidad de un punto que se mueve de manera continua, puesto que el punto de mínimo acercamiento avanza de a pasos discretos. Sin embargo, si el ángulo $\Delta\varphi$ es muy pequeño, de modo que hagan falta muchas revoluciones para que sea visible el hecho de que la órbita no es una elipse, el punto de mínimo acercamiento (y, en general, cualquier punto de la órbita con r fijo) pasará por una sucesión de puntos muy próximos unos de otros. Tiene sentido entonces decir que la órbita es una elipse que rota lentamente. Mercurio tarda 88 días en dar una revolución, mientras que el eje de su órbita tarda unos 24000 años en dar un giro completo.

La figura de abajo muestra tres ejemplos de este tipo de órbita. Cuando L/l es próximo a 1 puede decirse que se trata de una órbita elíptica que rota lentamente. Cuando L/l se aparta mucho de 1, ya no es tan natural hablar de una elipse. En la figura se indica el sentido de giro de la partícula y el precesión. Si c fuera menor que cero la precesión sería en el sentido contrario.



$L/l = 1{,}02$ $L/l = 1{,}1$ $L/l = 1{,}6$

4.2. ¿Órbita cerrada o abierta?

Otra cuestión interesante es saber si la órbita es cerrada o no. Suponiendo que el movimiento se inicie en $r = r_{\min}$ y $\varphi = 0$, nos preguntamos si luego de haber recorrido un ángulo φ_0 la órbita vuelve a pasar por el punto inicial. Deben suceder dos cosas: el radio tiene que ser de nuevo igual a $r_{\min}$ y el ángulo φ_0 tiene que ser un múltiplo entero de 2π,

$$\varphi_0 = 2\pi M. \tag{88}$$

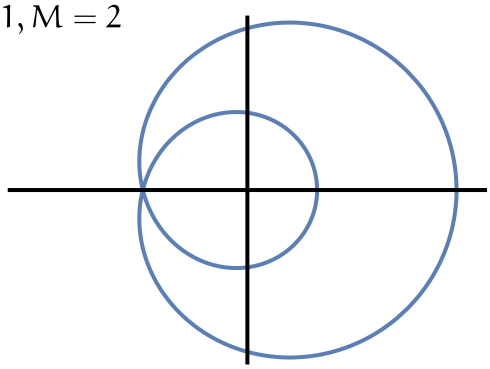
Según la ec. (79), el radio vuelve a tomar el valor inicial siempre que $\alpha\varphi_0$ sea igual a un múltiplo entero de 2π, digamos N. Entonces, para que la órbita se cierre luego de N pasos por el periápside, sin contar el primero, debe ser

$$2\pi M\alpha = 2\pi N. \tag{89}$$

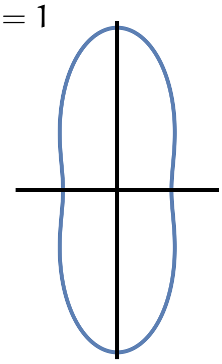
Estamos asumiendo que para estos valores de N y de M la órbita se cierra por primera vez, de modo que N y M no tienen que tener divisores comunes.

El número N da el número de veces que la partícula pasa por el periápside (sin contar el punto de partida), en tanto que M da el número de revoluciones. La figura siguiente muestra la órbita cerrada que resulta de tomar distintos valores de N y M. Sígase con el dedo cualquiera de las figuras para comprobar que los valores dados corresponden a la interpretación anterior en términos de revoluciones y de pasos por el periápside.

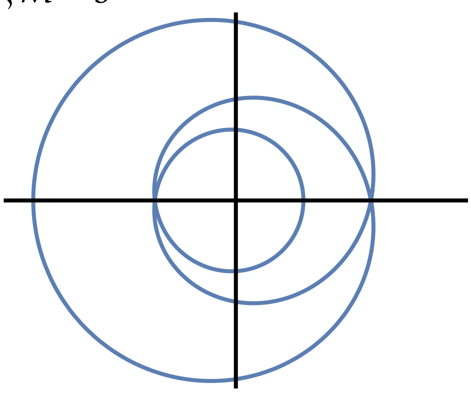
$N = 1, M = 2$



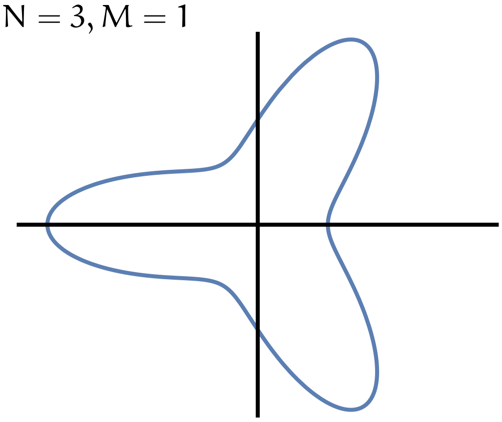
$N = 2, M = 1$



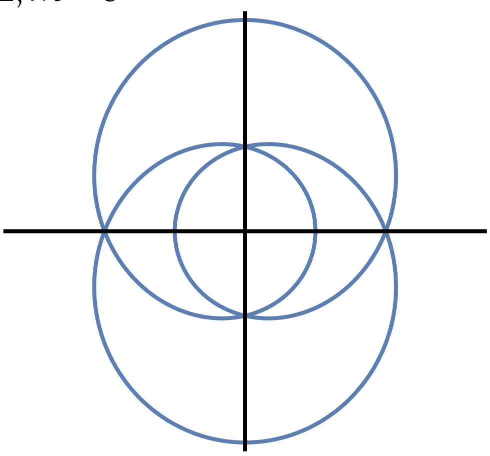
$N = 1, M = 3$



$N = 3, M = 1$



$N = 2, M = 3$



$N = 3, M = 2$